摂動論と漸近的方法

摂動論と漸近的方法

マスロフ 著
大内 忠
金子 晃 訳
村田 実

岩波書店

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

В. П. МАСЛОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965

訳　者　序

物理学の講義で‘量子力学：古典力学 ＝ 波動光学：幾何光学’という比例式を習う．これは量子力学の発見的説明によく用いられるものであるが，実は数学的にも深い内容をもっている．これにはさらに第3の項‘＝線型偏微分方程式：その陪特性方程式’がつけ加えられてより内容のあるものになる．この最後の項に現われる概念は純粋に数学的な起源をもつ．偏微分方程式を有限個の常微分方程式の積分に帰着させて解こうという古典求積法がそれである．この意味での求積法が通用するのは偏微分方程式全体から見ればごく特殊な方程式に過ぎないが，これを一歩譲って解の不連続部分だけを問題とするならば，非常に一般の方程式について常微分方程式(陪特性方程式)が十分な情報を与えることが知られるのである．不連続部分の取り出しは Fourier 変換によって高周波近似に対応している．数学者にはこれらの比例式は早くから覚られていたが，その事実の確立は擬微分作用素の理論と運動量座標における局所化の導入をまたねばならなかった．

ところで特異性が陪特性方程式の与える流線に沿って伝播してゆくとき，後者が互いに交わるところ(焦点集合)に達するとこのような局所理論は破綻する．Маслов の寄与は運動量座標と位置座標を同等に扱い，陪特性帯を相空間の中において見ることによって焦点の困難を切り抜け，解の不連続部分の大域的な形を与えたことである．これは陪特性帯が閉曲面を形成する定常的な場合に応用され，固有値の近似式を与える Bohr–Sommerfeld の量子化条件が明らかにされた．Маслов の創意はこの他にも本書の随所に見られる．

Маслов は自分の理論を‘作用素係数の微分方程式に対する多次元 WKB 法’と要約している．この点について一言すれば，本書で与えられているのはいわゆる‘折返し点内における，折返し点も含めた近似理論’である．WKB 法にはこれに加えて折返し点の外の古典的に粒子が入れない領域における近似理論，および両者の接続理論があるわけだが，本書の随所に記されている予告によれば彼の近刊の書ではそれらが論じられるようである．期待しよう．

第1部は順番に読んでゆける．第2部については近似解の計算になれていない読者は第1,2,3章を通読したらその諸例を思い起しながら以下の章をじっくり読まれたらよいであろう．

翻訳の分担は訳者たちによる原著輪講時のそれに従って次のようにした．

第1部　序論，第1章，第2部　第1,4,7,9章，付録(前半)，文献……金子晃

第1部　第2,4章，第2部　第2,5,8章……大内忠

第1部　第3,5章，第2部　第3,6章，付録(後半)，補足……村田実

脚注は原注，訳注とも現われた順に頁ごとの通し番号を付し，訳注の場合はその旨記した．〔　〕による本文中の挿入句も訳注を示す．特に長い訳注は章末に付した．訳注の基準は各訳者によってまちまちである．自明な訂正と思われるものは一々断らなかった．文献の引用は人名の後の[数字]が原著の，また[英字]が訳者による追加の文献を意味する．後者はまとめて原著文献の後につけた．主に原著出版以後の研究で本書の内容と関係深いと思われるものを集めたが完全ではない．

最後にわれわれの輪講を熱心に支援され，この訳書を出すきっかけとなられた犬井鉄郎教授に感謝いたします．また，訳稿の遅延等で長い間御迷惑をおかけした岩波書店編集部の荒井秀男氏にもこの場を借りて感謝いたします．

訳　者

序

本書はモスクワ大学物理学部における著者の数年間の講義をもとに書かれた．講義は摂動論，準古典近似および短波長近似，それに衝撃波理論における著者の研究に関するもので，本書の第1部全部と第2部のいくつかの章の内容を含んでいた．本書はモスクワ大学物理学部の数学科高学年を対象に書かれているが力学数学学部の学生や大学院生，あるいは理論物理を専攻する学生にも利用できる[1]．

本書により数理物理学の古典的な方程式と量子力学の方程式とのあいまいな関係を十分明確にしようというのが著者の構想である．そのため本書では量子力学や光学の方程式は函数空間における作用素係数の一般的な方程式の一例として扱われている．この種の一般化は物理の異なる諸分野に現われる漸近公式の間に対応関係を与えてくれるため，応用上有益でもある．

ここで得られている簡潔な新公式は直ちに以下の諸分野に応用することができる：電子光学における回折・屈折の理論(Glaser[1]，ここでは特に対応する古典力学の問題が十分に完成しているため，Stèrrok[1]を見よ)，音響学(Блохинцев[1], Бреховских[1]–[2])，衝撃波の理論(Friedlander[1], Friedrichs-Keller[1])，量子力学的分子論など[2]．

本書で得られている評価はすべて漸近式の形をとってはいるが，具体的問題の計算機による計算例では‘微小パラメーター’を1/3にとっただけで第2項までの漸近式がすでに見事な近似を与えている(たとえば Виленкин 他[1], p. 300を見よ)．

この本のうちで第1部第2章§6，第3章§2-3°，および第2部第5章§4，§5を除くすべての結果は著者によるものである．これらの多くは今回初めて発表された．第1部，第2章§1はС. В. Фомин によって書かれたもので，線

1) 物理屋の場合には参考書として Riesz-Sz. Nagy[1]および Courant[1]の御厄介になるという条件付きで．

2) 本書では方法論の抽象性のゆえもあってこれらの応用に関する展望は書かれていない．Heading[a]や上記 Friedlander, Glaser の本を見られるとよい．

型作用素論のよく知られた諸定理が解説されている．第1部，第4章の始めの部分と第5章，それに第2部第8章の§2には後に使用される既知の諸定理が導入されている．第2部第5章§5はВ. Дубновによって書かれた．

本書の第1部ではまず離散スペクトルを持つ自己共役作用素の摂動が扱われ，続いて作用素方程式の摂動論が考察されている．後者は漸近公式の評価を正確に求め，またいずれかの函数空間においてそれが収束することを示すための道具である．これらの抽象的定理の使い方が偏微分方程式の例で説明されている．

第2部では，振動する初期値，および不連続な初期値をもつ偏微分方程式の解の漸近挙動や，自己共役微分作用素の固有値の漸近形が調べられている．問題の設定と基本定理の叙述が第1章から第4章にかけて与えられ，次いでそれらの証明が第5章から第8章にかけて与えられている．トポロジー的命題の証明は技術的判断から，応用に十分な程度にとどめ，第2章に述べられたものよりは弱い形で第7章に与えられている．

応用の章では説明のために指数型の漸近公式の例があげられているが，本書では証明されていない．これらは近刊の書物で詳しく調べられることになっている．第9章では1次元の場合の固有値の漸近第2項の問題が解かれているが，一般の次元の場合もやはり上の書物で取り上げられるであろう．

終わりにあたり著者は次の方々に深い感謝の意を表したい．Н. Н. Боголюбов からは量子力学の公理について貴重な注意をいただいた．А. Н. Тихонов は適切でない問題についての相談に乗って下さった．С. В. Фомин には摂動論の第3章の編集を助けていただいた．Д. Аносов, В. Арнольд, С. Новиков にはトポロジーの問題に関する度重なる討論と親切な援助に感謝する．Ф. А. Березин, А. Виноградов, Я. Синаи は本書の各部分を読んで多くの貴重な編集上の助言をして下さった．本書の出版を準備するにあたり物理学部大学院生И. А. Гордеев, В. Дубнов は著者に対し献身的協力をしてくれた．ここに心からなる感謝を表明する．

著　者

目　　次

第2部　作用素係数の微分方程式論における特性帯の大域理論と漸近的方法

第1部　摂　動　論

序　　論

今日‘摂動論’という一般的名称により扱われている広大な諸問題の出発点は次のようなものであった：行列 A の固有値および固有ベクトルが知られているとき，次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ．

$$A(\varepsilon)=A+\varepsilon B. \tag{0.1}$$

ここに B は一定の行列であり，ε は微小数である．この問題の答はよく知られている．すなわち行列 $A(\varepsilon)$ の固有値 $\lambda_k(\varepsilon)$ は ε の冪級数

$$\lambda_k(\varepsilon)=\lambda_k+\varepsilon c_{1k}+\varepsilon^2 c_{2k}+\cdots$$

で書き表わされる．ここに λ_k は非摂動行列 $A=A(0)$ の固有値であり，c_{1k}, $c_{2k},\cdots$ は ε に依らない係数で，これらを計算する公式も容易に導くことができる．行列 $A(\varepsilon)$ の固有ベクトル $\psi_k(\varepsilon)$ についても同様の公式がある：Morse-Feshbakh[1][1]．

摂動論の問題では $A(\varepsilon)$ のある種の函数，たとえば $(A+\varepsilon B)^{-1}$, $e^{A+\varepsilon B}$ などを ε の冪級数で表わさねばならないことがある．これらの問題はいずれも有限行列に係っている限り大した困難を引き起こさないが，行列の代わりに無限次元 Banach 空間に働く線型作用素(演算子)を考えると事態は急に難しくなる．

有限次元の場合，たとえば次のことは明らかである：$A(\varepsilon)=A+\varepsilon B$ とするとき $\varepsilon\to 0$ とすれば $\lambda_k(\varepsilon)\to\lambda_k$, $\psi_k(\varepsilon)\to\psi_k$, さらに($A^{-1}$ が存在すれば)$(A+\varepsilon B)^{-1}\to A^{-1}$, また $e^{A+\varepsilon B}\to e^A$ など．つまり，非摂動行列の固有値，固有ベクトル，逆行列等はここでは摂動行列の対応する諸量に対し，いわゆる第0近似($\varepsilon\to 0$ のとき0に収束する項を無視する近似)になっている．

ところが無限次元の空間に働く作用素については，この第0近似の問題，つまり摂動作用素のある函数が $\varepsilon\to 0$ に際し非摂動作用素の同じ函数に収束するかどうか，は本質的に難しく，ときには対応する極限移行が成り立たないこと

1)〔訳注〕　または Riesz-Sz Nagy [1]，寺沢[a]など．特に $c_{1k}=(B\psi_k,\psi_k)$ である．

さえある．事態が簡単でないことを示す例として，Weyl による有名な定理を示すことができる．それによれば，〔可分な〕Hilbert 空間に働くどんな有界自己共役作用素(Hermite 演算子)も，有界で真に点スペクトルしか持たない自己共役作用素の列$\{A_n\}$の(ノルムの意味の)極限として表わすことができる．

A や B が非有界のとき

$$A(\varepsilon) = A+\varepsilon B \tag{0.2}$$

の形の作用素を考察するときには，摂動を引き起こす作用素 B が非有界であるため εB が小さいという概念すら明確な意味を持たなくなる．A や B が勝手では如何に ε が微小でも摂動項 εB の影響が何らかの意味で小さいことを期待する根拠はどこにもない．ここで意味のある結果を得るために，普通は摂動項 B が何らかの意味で非摂動作用素 A に‘従属’していることが要請される．この方向での重要な結果が Rellich, Sz. Nagy[1] (Riesz–Sz. Nagy[1]), Weyl, М. Г. Крейн[1], Ладыженская–Фадеев[1]などに得られている．

他の可能性として(それを以下探求するのだが) $\varepsilon\to 0$ のときの $A(\varepsilon)$ の行動に条件を課する行き方がある．この際 $A(\varepsilon)$ は(0.2)の形であると仮定する必要はなく，もっと自由に取り得る．

摂動論の方法は種々の物理的問題，特に量子力学において広く用いられている．量子力学系の Hamilton 函数が，しばしば $H=H_1+\varepsilon H_2$ の形をしていると見なすことができるのがその理由である．ここに H_1 は固有函数や固有値がすでに知られているような Hamilton 函数であり εH_2 はそれからの微小‘誤差’である．(そのような状況の例としては，たとえば弱い相互作用を持つ粒子系がある．このとき H_1 は相互作用を持たない粒子系の Hamilton 函数であり，εH_2 はその相互作用である．)

B が有界作用素のときには，$A+\varepsilon B$ について上に列挙された摂動論の問題は十分小さい ε に対して解をもつ．それらの解は ε の収束冪級数で与えられる．以下それを記そう(いわゆる摂動論の公式)．

$$[A+\varepsilon B]^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k(BA^{-1})^k \tag{0.3}$$

$$e^{i(A+\varepsilon B)} = e^{iA}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varepsilon^k(iB)^k \qquad (0.4)^{1)}$$

1)〔訳注〕 A, B が可換でないときはもっと複雑な式になる．

A, B はともに Hilbert 空間 H に働く自己共役作用素で λ_0 は A の孤立した m 重点スペクトルであるとし，d を λ_0 から A の他のスペクトルまでの距離とする．作用素 A の λ_0 に対応する固有函数の空間への射影作用素 $E^A_{\lambda_0-d/2,\lambda_0+d/2}$ は次の式で表わされる．

$$E^A_{\lambda_0-d/2,\lambda_0+d/2}=\frac{1}{2\pi i}\oint(A-z)^{-1}dz \tag{0.5}$$

ここに積分路は実軸上の 2 点 $\lambda_0-d/2, \lambda_0+d/2$ を通る複素平面内の閉曲線である[1)].

また，$g\in H$ を考えている固有空間への射影が 0 ではないような任意の元とすれば，明らかに

$$\lambda_0=\frac{(g, AE^A_{\lambda_0-d/2,\lambda_0+d/2}g)}{(g, E^A_{\lambda_0-d/2,\lambda_0+d/2}\,g)}=\frac{\oint(g, A(A-z)^{-1}g)dz}{\oint(g,(A-z)^{-1}g)dz}.$$

ε が十分小さいとき，射影作用素 $E^{A+\varepsilon B}_{\lambda_0-d/2,\lambda_0+d/2}$ の階数は m に等しく，

$$E^{A+\varepsilon B}_{\lambda_0-d/2,\lambda_0+d/2}=\frac{1}{2\pi i}\oint(A-z)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k[B(A-z)^{-1}]^k dz \tag{0.6}$$

となる．積分路は点 λ_0 を中心とする半径 $d/2$ の円周でよい．したがって，点 λ_0 の $d/2$–近傍における作用素 $A+\varepsilon B$ の固有函数や固有値は，同じ近傍における次の作用素のそれらに一致する．

$$(A+\varepsilon B)\frac{1}{2\pi i}\oint(A-z)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k[B(A-z)^{-1}]^k dz. \tag{0.7}$$

後者は m 次元部分空間の上で考察できるから，問題は m 階の対称行列に対するものに帰着され，始めに述べたように $A+\varepsilon B$ の固有函数や固有値の級数展開が得られるのである．こうして得られた級数は摂動(論的)級数とよばれる．量子力学の教科書(Ландау–Лифшиц[1], Schiff[1]など)では通常この始めの 2

---

1) この積分は Cauchy–Riemann 型の近似和の作用素ノルムの位相による極限として定義される(第 2 章 §1 を見よ)．A が変数 x の L_2 函数の空間に働く作用素で離散単純スペクトルを持つときには

$$(A-z)^{-1}g=\int\sum\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(\xi)}}{\lambda_n-z}\,g(\xi)d\xi$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint(A-z)^{-1}g\,dz=\int\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(\xi)}g(\xi)d\xi=E^A_{\lambda_n-\delta,\lambda_n+\delta}g$$

となる．

項だけが使われる.

始めの二つの章では，作用素 A が離散スペクトルだけをもつか，あるいは少くとも一つは孤立点スペクトルを持つ場合が考察される.

ユニタリ作用素と 1 パラメーター作用素半群の摂動は第 4 章で考察される. そこではより一般に，初期値問題

$$\begin{cases} i\dfrac{du}{dt} - A_n(t)u = F(t) \\ u(0) = u_0 \in H \end{cases}$$

の解の $n\to\infty$ のときの行動が探求されている. ここに $A_n(t)$ は Banach 空間 H に働く作用素の列でパラメーター t に連続に依存し，$n\to\infty$ のとき何らかの意味で収束するものとし，$F(t)$ は H に値を持つ t の与えられた函数である.

第 3 章と第 5 章ではさらに一般的な問題が研究されている. それは次のように述べられる. Banach 空間 B に働く作用素の族 $\{T_\varepsilon\}$ (あるいは列 $\{T_n\}$) は $\varepsilon\to 0$ のとき ($n\to\infty$ のとき) 極限作用素 T に何らかの意味で近づくものとする. 摂動論の順問題というのは作用素 T_ε^{-1} (あるいは T_n^{-1}) の近似を既知の作用素 T, T^{-1} を用いて構成することである. また，反対に，T^{-1} の存在や近似を族 T_ε^{-1} を用いて解明する摂動論の逆問題も研究される.

摂動論の問題のいくつかの解決にあたり正則化の方法が適用される. 上に述べた摂動論の具体的な諸問題に対しては正則化の一定のアルゴリズムが導かれ，これに応じて評価も与えられている. これらのアルゴリズムは一定の (漸近的) 意味において最適のものである. また，これらのアルゴリズムのなかには，線型積分方程式論のある種の問題の解決に役立つ可能性を持つものもある.

ここに引用された正則化の方法は測定装置の性質の物理学的表現をもとにしている. (Маслов[9]に簡単な説明がある.) それは抽象的作用素に対しても適用できるものではあるが，その導入の必然性は，粒子の位置と運動量とを同時に決定することはできないという Heisenberg の不確定性原理に由来している.

距離空間における適切でない問題の正則化に関する一般的な問題設定といくつかの正則化の具体的方法は Тихонов[1], [2]により与えられたことを注意しておく.

第1章　摂動論における正則化の問題

§1　摂動論の正則化問題の設定

1° Schrödinger 方程式に対する摂動ポテンシャルの正則化の例

Schrödinger 方程式

$$-\frac{d^2\phi^0}{dx^2}+u(x)\phi^0 = \lambda^0\phi^0$$

を考えよう．λ^0 を孤立点スペクトルとする．摂動方程式は

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2}+(u(x)+\varepsilon v(x, \varepsilon))\phi = \lambda\phi$$

の形である．ここに $v(x,\varepsilon)$ は各 x について $\varepsilon\to 0$ のとき有界である．

物理ではポテンシャルの摂動 $v(x,\varepsilon)$ が $|x|\to\infty$ のとき速やかに無限大となる場合にも，解の摂動論的級数への形式的展開がしばしば用いられる．こういう場合摂動方程式のスペクトルは離散的にも連続にもなり得る．そして最初の数項が必要な量のよい近似を与えるのにそれ以上近似項を増やすと結果は悪くなる一方ということがしばしば起こる．さらに，摂動論的級数の各項を表現する積分自身が発散することもしばしばで，ここに発散の除去あるいは積分の正則化の問題が生じる．これは普通ある種の物理的考察を基礎に行なわれる．Schiff は彼の量子力学の教科書において‘実際には解析性の問題はいくつかの最も単純な問題についてしか研究されていないにもかかわらず’摂動論的級数の収束を仮定している．実際には $A(\varepsilon)=A+B_\varepsilon$ で $\varepsilon\to 0$ のとき $B_\varepsilon\to 0$ という一般の場合級数は収束しないのが普通であろう．

Schrödinger 方程式の例で積分 $(\phi_n{}^0, B_\varepsilon\phi_n{}^0)$ は発散するが，以下にわかるようにこれを適当に正則化して得られた表現が λ^0 の第1補正項を与えるようにできるようなものを示そう．次の方程式を考える．

$$-\phi_n{}''+x^2\exp(\varepsilon x^4)\phi_n = \lambda_n\phi_n$$

ここに

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_n|^2dx = 1.$$

ここでは $x^2(\exp(\varepsilon x^4)-1)$ が摂動項であり，x^2 が非摂動ポテンシャルである．$\epsilon=0$ のときにはよく知られているように(たとえば Виленкин 他[1]) $\lambda_n{}^0=2n+1$ であり固有函数 $\psi_n{}^0$ は $|x|\to\infty$ のときある正数 $\alpha>0$ に対し $\exp(-\alpha x^2)$ よりも遅く 0 に近づく．ゆえに $\lambda_n{}^0$ に対する第1補正項を表わす積分は発散する:

$$\lambda_n{}^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}(\exp(\varepsilon x^4)-1)x^2|\psi_n{}^0|^2dx=\infty.$$

ところが実際には，以下に見るように次の積分が第1補正項の役割を果たす．

$$\lambda_n{}^{(1)}=\int_{-\sqrt[4]{2/3\varepsilon}}^{\sqrt[4]{2/3\varepsilon}}(\exp(\varepsilon x^4)-1)x^2|\psi_n{}^0|^2dx.$$

これは $O(\varepsilon)$ の量であって $\lambda_n=\lambda_n{}^0+\lambda_n{}^{(1)}+O(\varepsilon^2)$ となる．

同様の問題の正則化は第2章で証明されるであろう．そこでは，この種の問題の場合には作用素 B_ε をこれに‘近い’有界作用素 $\tilde{B}_\varepsilon$ でおき換え，$\lambda_n{}^{(1)}=(\psi_n{}^0, \tilde{B}_\varepsilon\psi_n{}^0)$ が $\lambda_n{}^0$ に対する第1補正項となるようにできることがわかる．このようなおき換えは摂動論的級数の他の任意の項についても行なうことができる．

2° 正則化の方法と表現の選択との関係

与えられた摂動論の問題に自然に適用される正則化の方法の選び方は，与えられた問題が如何なる表現の下に考察されているかに関係する．すでに述べたように物理的考察により非摂動作用素を見出さねばならない．

たとえば Schrödinger 方程式

$$-\frac{d^2\psi_n}{dx^2}+v(x,a)\psi_n=\lambda_n\psi_n \tag{1.1}$$

を考えよう．ここに

$$v(x,a)=\begin{cases}x^2 & x<a+1/2-\sqrt{a+1/4}\ \text{のとき}\\ (x-a)^4 & x\geqq a+1/2-\sqrt{a+1/4}\ \text{のとき}\end{cases} \tag{1.2}$$

(図1を見よ)．$\varphi(x)$ を台が有界な函数とする．a が十分大きいとき $v(x,a)\varphi(x)$ は明らかに $x^2\varphi(x)$ に等しい．ゆえに掛け算作用素 $v(x,a)$ は $a\to\infty$ のとき掛け算作用素 x^2 に収束する．

次のような問題に着目しよう．われわれは最初にポテンシャル場 x^2 の下にある系を考察し，固有値(‘レベル’) $\lambda_n{}^0$ と固有函数 $\psi_n{}^0$ の組を得た:

$$-\psi_n{}^{0\prime\prime}+x^2\psi_n{}^0=\lambda_n{}^0\psi_n{}^0$$

ポテンシャルの摂動 $v(x,a)-x^2$ はレベル $\lambda_n{}^0$ や固有函数 $\psi_n{}^0$ にどのように影響

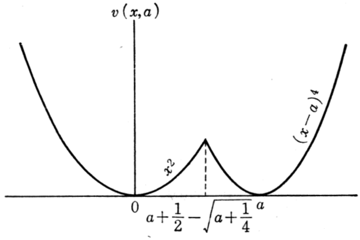


図 1

するであろうか．a が十分大きいとき，この摂動は $\lambda_n{}^0$ や $\psi_n{}^0$ に(n を固定して $a\to\infty$ としたとき)小さく反映することが容易にわかる(第2章を見よ)．この事実には次のような物理的意味を与えることができる．物理学者Aはポテンシャルの場 x^2 の下にある粒子を研究しており，遠くの方に加えられた摂動がこの粒子に及ぼす影響を調べている．このときには以上の数学的考察はすべて具体的な物理的内容を持つことになる．

今度は‘隣りの’ポテンシャルの穴 $(x-a)^4$ を物理学者Bが研究しているとしよう．彼は方程式

$$-\tilde{\psi}_n{}^{0\prime\prime}+(x-a)^4\tilde{\psi}_n{}^0=\tilde{\lambda}_n{}^0\tilde{\psi}_n{}^0$$

に対応する固有値 $\tilde{\lambda}_n{}^0$ と固有函数 $\tilde{\psi}_n{}^0$ が物理学者Aのポテンシャル場 x^2 により如何に影響されるかに興味を持つ．われわれが上に行なった，$a\to\infty$ のとき $v(x,a)$ が x^2 に収束するという類の考察は物理学者Bには意味が無い．物理学者Bの欲する問題を解くには，座標の原点を点 a に移さなければならない．そこで

$$\tilde{v}(y,a)=v(x,a)=\begin{cases} y^4 & y\geqq 1/2-\sqrt{a+1/4}\ \text{のとき} \\ (y+a)^2 & y<1/2-\sqrt{a+1/4}\ \text{のとき}\end{cases}$$

と記そう．$a\to\infty$ のときポテンシャル $\tilde{v}(y,a)$ は y^4 に収束するであろう．こうして物理学者Bを満足させる設定が得られた．

われわれは座標の変換，すなわち a だけの平行移動を行なった．換言すれば，ユニタリ変換 $e^{a(d/dx)}$ を行なうことにより Schrödinger 作用素の別の表現に移ったのである．方程式

$$-\psi''+\tilde{v}(y,a)\psi=\lambda\psi$$

は(1.1)の新しい表現による方程式である．量子力学の観点からはこれら二つの表現は全く同値であるが，$a\to\infty$ の極限において対応するSchrödinger作用素は別々の作用素に収束する．

3° 非調和振動子

さて，非調和振動子の場合を考えよう．

$$-\psi''+\{x^2+\varepsilon x^{2k+1}\}\psi=\lambda\psi. \tag{1.3}$$

作用素 $-d^2/dx^2+x^2+\varepsilon x^{2k+1}$ は $k\geqq 1$ のとき本質的自己共役[1)]ではないので，方程式(1.3)は意味を持たないと思われるかもしれない．$k\geqq 2$ のとき任意の $\lambda<0$ に対して方程式(1.3)の解で L_2 に属するものがあるが[2)]，これは何ら物理的意味を持たない．

それでもなお物理学者は摂動論的級数のはじめの方の項を計算し，それはある種の実験とはよく一致する．ときにはある項から先は実験とどんどん一致しなくなることもある．摂動論を適用するのが無意味な実験もあり得るであろう．

数学的摂動論は，どのような量が微小な摂動によって不変に保たれるかという問いに答え，また，これらの量が摂動論的級数を用いてどのくらいの精度で求め得るかを示さなければならない．しかし一方ではすでに見たように物理学者は摂動が彼の実験にあまり大きく反映しないという確認を得たがっている．ゆえに摂動論というのは結局このような些細な変化を計算しその評価を与えることであるということができる．

4° 孤立系の安定性

$|x|\to\infty$ のとき ∞ に近づくようなポテンシャル $u(x)$ を考えているとき，われわれはすでに，一つの理想化を行なっているのである．すなわち，x が大きいところでポテンシャルが十分大きく，またまわりの系との相互作用が小さいならば，ポテンシャルを $\lim_{x\to\infty}u(x)=\infty$ となるように外挿できるのである．こうして考えている系が孤立していると仮定される．このような仮定が許されるかどうかはわれわれの系が空間に局所化できるかどうか，すなわちわれわれの観測装置が観測し得る空間の領域(視野)は有限だが，それは粒子が事実上この領

1)　Schrödinger作用素は台が有界で十分滑らかな函数の集合 D' の上の対称作用素 H を定める．Schrödinger作用素が本質的自己共役とはこの H の閉包が自己共役になること(Виленкин 他[1])．

2)〔訳注〕　もちろんこのような解はもとの対称作用素の如何なる自己共役拡張の定義域にも含まれない．

域から外には出られない程度には大きいかどうかにかかわる．つまり，この領域の境界付近で粒子の存在確率が事実上，すなわちわれわれの装置の精度において0に等しければよいのである．

さて，われわれの加える摂動が装置の視野の外において，すなわち非摂動方程式を記述するときその相互作用をすでに無視してしまったような系に対してのみ本質的に0でないと仮定しよう．われわれの装置は明らかにこの摂動の影響を発見できない．

注意しておくが自然界には完全に孤立した系などというものは存在せず，したがって厳密に離散的なスペクトルも存在しない．しかしまわりの系との相互作用が非常に小さければ実験者にはスペクトルの帯はただ1本のレベルと区別できず，問題を離散スペクトルを持つ孤立系に理想化して考えることが可能となる．ゆえに孤立系の Schrödinger 方程式を書くときには遠方の摂動に対する安定性を確かめ，どの量がこれにともなって安定であるかを示しておく必要がある．物理学者はまさにこのような量を観測するのである．どのような量が遠方のポテンシャルの変更で安定であるかを理解するために例を調べよう．以下の例では最終的結果だけを掲げるが証明は全く初等的である．

a)　Schrödinger 方程式

$$-\phi_n''(x)+v(x,a)\phi_n(x)=\lambda_n\phi_n(x) \tag{1.4}$$

を考える．ここに $v(x,a)$ は(1.2)の型のポテンシャルである(図1)．次のような問題に興味を持つとしよう．最初にわれわれはポテンシャル x^2 を持つ場の中の系を考察し，レベル $\lambda_n{}^0=2n+1$ と固有函数

$$\phi_n{}^0=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi^{1/2}2^n n!}}H_n(x)$$

の組を得た．ここに $H_n(x)$ は Hermite 多項式である．ポテンシャルの摂動 $v(x,a)-x^2$ はレベル $\lambda_n{}^0$ と固有函数 $\phi_n{}^0$ にどのように影響するであろうか．すでに言及したように a が十分大きければ(定まった n について $a\to\infty$ のとき)この摂動の $\lambda_n{}^0$ や $\phi_n{}^0$ への反映は微小である．実際このときには変化 $\sigma_a=O(\phi_n{}^0(x_0(a)))$ の程度であることがわかる．ここに $x_0(a)=a+1/2-\sqrt{a+1/4}$ である．$a\to\infty$ のときこの量はある定数 $\alpha>0$ により $\exp(-\alpha a^2)$ の形で0に収束する．量 σ_a が無視できる，すなわちわれわれの装置の精度がこの程度の微小量

を見分けられないと仮定しよう．このときわれわれは，結果を損うことなくポテンシャル x^2 を点 $x_0(a)$ の外まで‘外插’することができる．つまり $v(x,a)$ の代わりに x^2 を考えることができる．

この例では方程式(1.4)の固有値は2種類に分かれる．第1の類の固有値は調和振動子のもの $\lambda_n{}^0=2n+1$ に近く，第2の類の固有値は方程式

$$-\tilde{\phi}_n{}^{0\prime\prime}+(x-a)^4\tilde{\phi}_n{}^0=\tilde{\lambda}_n{}^0\tilde{\phi}_n{}^0$$

のそれに近い．これに応じて固有函数も2種類に分かれる．第1の類は $\phi_n{}^0$ に近く，第2の類は $\tilde{\phi}_n{}^0$ に近い．つまり，ポテンシャル x^2 および $(x-a)^4$ をもつ二つの系は a が十分大きいとき無視し得るような小さい相互作用しか持たず，したがってこれらを別々に考察することができるのである．

b)　次に方程式(1.4)をポテンシャル $v(x,a)$ を

$$v(x,a)=\begin{cases} x^2 & x<a/2 \text{ のとき} \\ (x-a)^2 & x\geqq a/2 \text{ のとき} \end{cases}$$

として調べよう．掛け算作用素 $v(x,a)$ は $a\to\infty$ のときやはり x^2 に収束する．しかし先の場合と異なり摂動方程式(1.4)には $\lambda_n{}^0$ に近い固有値が二つ存在する．それを $\lambda_n, \bar{\lambda}_n$ としよう．これらは $\lambda_n{}^0$ から $\sigma_a=O(\phi_n{}^0(a/2))$ 程度離れている．λ_n および $\bar{\lambda}_n$ にそれぞれ対応する固有函数 ϕ_n および $\bar{\phi}_n$ は区間 $-\infty<x<a/2$ において $\phi_n{}^0/\sqrt{2}$ から(符号を除き)やはり σ_a 程度離れている．

‘左’と‘右’の穴の固有値は等しいのであるから，これは‘共鳴’が起こっているのだといえる．ゆえにレベル $\lambda_n{}^0$ は λ_n と $\bar{\lambda}_n$ の二つに‘分解’し対応する固有函数 ϕ_n と $\bar{\phi}_n$ は $a/2\leqq x<\infty$ において絶対値が $\phi_n{}^0(x-a)/\sqrt{2}$ に近い．

一方，$a/2\leqq x<\infty$ においては $\phi_n{}^0=O(\exp(-\alpha a^2))$ なのだから，この場合摂動方程式(1.4)の固有函数が $a\to\infty$ のとき非摂動方程式のそれに近づくかどうか

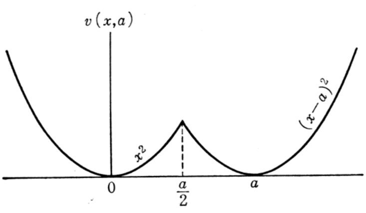


図2

問題となるのは $-\infty<x\leqq a/2$ の範囲においてだけである．しかしながら，粒子が二つのレベル λ_n と $\bar{\lambda}_n$ に存在する確率の合計は $a\to\infty$ のとき1と σ_a しか違わないことに注意しよう．もしも装置の精度が σ_a を見分けられなければ，われわれは λ_n と $\bar{\lambda}_n$ とを分離することができず，ただ1本のレベルを観測するであろう．この‘レベル’における粒子の存在確率の密度は誤差 σ_a の範囲で

$$\frac{|\psi_n{}^0(x)|^2}{2}+\frac{|\psi_n{}^0(x)|^2}{2}=|\psi_n{}^0(x)|^2$$

に等しい．ゆえに，この例においても物理的結果を損うことなくポテンシャル x^2 を点 $a/2$ を越えて外插でき，ただ x^2 というポテンシャルを研究すればよいのである．

c)　今度は次の形のポテンシャル $v(x,a)$ を考えよう．

$$v(x,a)=\begin{cases} x^2 & -a/2\leqq x\leqq a/2 \text{ のとき} \\ (x-ka)^2 & ka-a/2\leqq x<ka+a/2 \text{ のとき}(-m+1\leqq k\leqq m-1) \\ (x-ma)^2 & x\geqq ma-a/2 \text{ のとき} \\ (x+ma)^2 & x<-ma+a/2 \text{ のとき} \end{cases}$$

この場合の状況は一つ前の例と同様である(‘共鳴’が起こる)が $\lambda_n{}^0$ に近い(距離 $\sigma_a=O(\psi_n{}^0(a/2))$ 程度の)レベルは $2m+1$ 個ある．($\lambda_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\bar{\lambda}}_n$ 等々．) 装置の精度が σ_a を越えなければ，われわれは1本の‘融合した’レベル $\lambda_n{}^0$ を観測し，粒子が $-a/2\leqq x\leqq a/2$ かつ $\lambda_n{}^0-\sigma_a\leqq\lambda\leqq\lambda_n{}^0+\sigma_a$ の範囲にある確率の総和は1と σ_a しか違わない．方程式(1.4)の固有函数は $-a/2\leqq x\leqq a/2$ の範囲では絶対値において $\psi_n{}^0$ とあまり違わない．したがって，量 σ_a が無視できるならばポテンシャル $v(x,a)$ を x^2 に変えても物理的状況は変わらない．

さて，この例において m を ∞ にしてみよう．するとスペクトルは連続とな

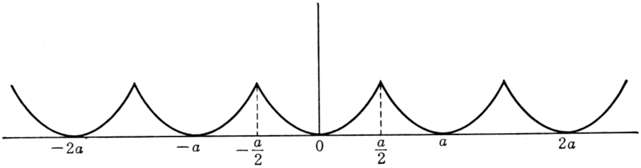


図3

り，(一般)固有函数[1)]の平方は可積分ではなくなる．それにもかかわらず $-a/2 \leqq x \leqq a/2$ の範囲においては(連続スペクトルの)固有函数 ψ_n は $\psi_n{}^0$ と $\sigma_a = O(\psi_n{}^0(a/2))$ の程度の誤差で一致し，スペクトルは $\lambda_n{}^0$ のまわりに σ_a 以下の幅の帯となるであろう．ゆえに装置の精度が σ_a より悪ければ，われわれにはこの帯は1本のレベルと区別できず，したがってポテンシャル $v(x, a)$ を x^2 に変えてもよいことになる．

d)　最後に，次のようなポテンシャルを考えよう．

$$v(x, a) = \begin{cases} x^2 & x < a/2 \text{ のとき} \\ 0 & x > a/2 \text{ のとき} \end{cases}$$

この場合スペクトルは連続で，半直線 $\lambda > 0$ 全体を占める[2)]．しかしながら点 $\lambda_n{}^0$ の σ_a-近傍 $(\sigma_a = O(\psi_n{}^0(a/2)))$ に属さない点 λ に対応する固有函数は，$x < a/2$ の範囲では0に近づき，その大きさは σ_a の程度であろう．点 $\lambda = \lambda_n{}^0$ と，そのある近傍に属する点 λ に対応する固有函数は $x < a/2$ の範囲では $c_n\psi_n{}^0(x)$ と σ_a しか違っていないであろう．

ゆえにわれわれの装置が σ_a 程度の量を判別できなければ，穴の内部における粒子の存在確率が目立って大きいような $\lambda_n{}^0$ の付近のスペクトルの集合には幅を認めることができず，1本の‘融合した’レベル $\lambda_n{}^0$ として観測される．以上の条件の下にポテンシャル $v(x, a)$ を x^2 で代用することができる．

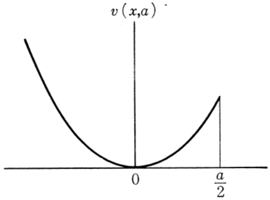


図4

1)〔訳注〕　λ が連続スペクトルのとき方程式(1.4)の解は $L_2[\boldsymbol{R}^1]$ の中には存在しないが適当に拡大した空間の中で見出すことができる．それを一般固有函数というが，以下本書では‘一般’の文字を略することが多い．この概念の抽象化は Гельфанд-Шилов[2]にある．

2)〔訳注〕　一般固有函数は次のようにして構成できる：$-\psi'' + x^2\psi = \lambda\psi$ は $x \to -\infty$ で0に近づく解を一つ持つ．それから得た初期値 $\psi(a/2)$, $\psi'(a/2)$ をもとに $-\psi'' = \lambda\psi$ を $x \geqq a/2$ で解いてつなげれば(1.4)の有界な解が得られる．このとき λ が連続スペクトルとなることは物理的には自明だがポテンシャル v が下に有界の仮定のもとに Шноль[1]に数学的証明がある．

これらの例により孤立系が遠方の摂動に関して安定という意味をどのように解釈すればよいかが明らかになった．すなわち，非摂動ポテンシャル $u(x)$ と，$a\to\infty$ のとき全直線に近づくような区間の中では0であるような摂動 $v(x,a)$ とが与えられたとき，ポテンシャル $u(x)$ の系の固有函数がこのような'遠方'の摂動により安定であると期待できるのは，$a\to\infty$ の極限では全直線と一致するような a に依存した x のある有限区間においてだけなのである．（この区間をわれわれは視野(可視領域)と名づけよう．）この摂動に際し，もとの方程式とは何の関係もないようなスペクトルの点が新たに現われるかもしれないが，粒子がそのようなレベルに存在する確率は視野の範囲においては無視し得るほど小さいことが以上の例において判明したのであった．

§2　1次元の Schrödinger 方程式の摂動論

1°　基礎概念

作用素

$$\hat{L}^0 = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

においてポテンシャル $u(x)$ は条件 $u(\pm\infty) = +\infty$ を満たしているとする．ポテンシャルの摂動項 $\varepsilon v(x,\varepsilon)$ は各 x を固定するごとに $\varepsilon\to 0$ のとき0に近づくとする．（§1-4° の例 a においては $x > x_0(1/\varepsilon)$ のとき $\varepsilon v(x,\varepsilon) = -x^2 + (x-1/\varepsilon)^4$, $x \leqq x_0(1/\varepsilon)$ のとき $\varepsilon v(x,\varepsilon) = 0$ であり，また例 b では $x > 1/2\varepsilon$ のとき $\varepsilon v(x,\varepsilon) = -x^2 + (x-1/\varepsilon)^2$, $x \leqq 1/2\varepsilon$ のとき $\varepsilon v(x,\varepsilon) = 0$ である．）摂動作用素は次の形である．

$$\hat{L}\psi = -\psi'' + [u(x) + \varepsilon v(x,\varepsilon)]\psi.$$

§1-4° の例 a-d では視野がパラメーター ε に依存しそれが $\varepsilon\to 0$ のとき $(-\infty, +\infty)$ に近づくのを見た．

ここで視野というものを一般的に定義しよう．α を ε に依存しない定数とし，x_ε を $|x| \leqq x_\varepsilon$ では $\varepsilon|v(x,\varepsilon)| \leqq \alpha$, かつ $\varepsilon|v(x_\varepsilon,\varepsilon)| = \alpha$ となるように選ぶ．領域 $|x| \geqq x_\varepsilon$ を不可視領域とよぼう．定数 α は後に正確に定めるが，それは非摂動作用素だけで定まるものである．

領域 $|x| \leqq x_\varepsilon/2$ を視野とよぼう．$r_\varepsilon = x_\varepsilon/2$ は視野の半径である．領域 $x_\varepsilon/2 \leqq |x| \leqq x_\varepsilon$ は視野と不可視領域との中間である．上に述べたことと対応して，わ

れわれの装置ではこの領域に非摂動ポテンシャル場の粒子を見出すことはできないと仮定される．これはつまり

$$\int_{x_\varepsilon/2}^{x_\varepsilon} |\psi_n{}^0(x)|^2 dx$$

の程度の量を無視しようということである．

周知のように(Kamke[1])，ポテンシャル $u(x)$ が x^{2k} の形で増大すれば，$|x|\to\infty$ のとき次の評価が成り立つ．

$$|\psi_n{}^0(x)| \leqq C_n \exp(-|x|^{k+1}/(k+1)), \qquad n=1,2,\cdots$$

ここに C_n はある定数である．したがって $x\to\infty$ のとき

$$x^{k+1}/(k+1) > (1-\delta)\int_0^x \sqrt{|\lambda_n{}^0 - u(x)|}\,dx$$

であることに注意すれば，これより

$$\int_{x_\varepsilon/2}^{x_\varepsilon} |\psi_n{}^0(x)|^2 dx \leqq \int_{x_\varepsilon/2}^{\infty} |\psi_n{}^0(x)|^2 dx \leqq C_n{}^2 \exp(-2|x_\varepsilon/2|^{k+1}/(k+1))$$
$$\leqq C_1 \exp\left\{-2(1-\delta)\int_0^{x_\varepsilon/2} \sqrt{|\lambda_n{}^0 - u(x)|}\,dx\right\}$$

を得る．ここに C_1, δ は ε に依らない適当な定数である．もしも

$$\sigma(\varepsilon) = C\exp\left\{-(1-\delta)\int_0^{x_\varepsilon/2} \sqrt{|\lambda_n{}^0 - u(x)|}\,dx\right\}$$

程度の量を無視できれば，上に述べた直観的考察によりポテンシャルの摂動 $\varepsilon v(x,\varepsilon)$ の不可視領域に横たわる部分からはわれわれの系への影響はないものと仮定することができる．

ポテンシャル $v(x,\varepsilon)$ を次のような二つの和 $v(x,\varepsilon)=\bar{v}(x,\varepsilon)+\bar{\bar{v}}(x,\varepsilon)$ に分けよう：

$$\begin{aligned} \bar{v}(x,\varepsilon) &= \begin{cases} v(x,\varepsilon) & |x| \leqq x_\varepsilon \text{ のとき} \\ 0 & |x| > x_\varepsilon \text{ のとき} \end{cases} \\ \bar{\bar{v}}(x,\varepsilon) &= \begin{cases} 0 & |x| \leqq x_\varepsilon \text{ のとき} \\ v(x,\varepsilon) & |x| > x_\varepsilon \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

非摂動作用素だけで定まる定数 $\beta>0$ があって，摂動 $\varepsilon v(x,\varepsilon)$ の絶対値が β を越えないときには摂動論的級数は収束するということが知られている．この定数を次の補題で求めよう．

2° 視野の半径のより正確な定義

補題 1.1　A, B を Hilbert 空間 H の自己共役作用素とし，d をある点 μ から A の μ 以外のスペクトルの集合への距離とする．また，ある $\sigma>0$ に対し $\|B\| \leqq d/(2+\sigma)$ とする．このとき

1) 区間 $\Delta=\{\mu-d/(2+\sigma), \mu+d/(2+\sigma)\}$ において作用素 $A+B$ のスペクトルは離散的である．さらに射影作用素 $E_\Delta{}^{A+B}$ に対応する部分空間の次元は μ が作用素 A のスペクトルでなければ0であり，μ が A の固有値ならばその重複度に一致する．

2) 区間 Δ における作用素 $A+\varepsilon B$ の固有値と，これに対応する固有函数を決定する摂動論的級数((0.6), (0.7)を見よ)は $\varepsilon\leqq 1$ のとき収束する．

このように，作用素 $A+\varepsilon B$ の固有函数や固有値は $\varepsilon=1$ のとき収束する摂動論的級数として表わすことができるのである．

証明　$0\leqq l<d$ とし，点 $\mu+l$ をとろう．明らかに

$$[A+\varepsilon B-\mu-l]^{-1} = [A-\mu-l]^{-1}[1+\varepsilon B(A-\mu-l)^{-1}]^{-1} \tag{2.2}$$

が成り立つ．よく知られているように(Riesz–Sz. Nagy[1])

$$\|[A-\mu-l]^{-1}\| \leqq \max\left\{\frac{1}{l}, \frac{1}{d-l}\right\}$$

であるから，$\varepsilon\leqq 1$ のとき

$$\|\varepsilon B(A-\mu-l)^{-1}\| \leqq \max\left\{\frac{d}{(2+\sigma)l}, \frac{d}{(2+\sigma)(d-l)}\right\}$$

となる．任意の有界作用素 T に対し $\|1+T\|\geqq 1-\|T\|$ であるから，$\|T\|<1$ ならば[1)]

$$\|[1+T]^{-1}\| \leqq \frac{1}{1-\|T\|}$$

となる．そこで l を

$$\frac{d}{(2+\sigma)l} < 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{d}{(2+\sigma)(d-l)} < 1$$

となるようにとれば，作用素 $T=\varepsilon B[A-\mu-l]^{-1}$ のノルムは1を越えず，したがって

1)　実際，もしも $\|Ag\|\geqq\alpha\|g\|$ ならば，$g=A^{-1}f$ とおけば $(1/\alpha)\|f\|\geqq\|A^{-1}f\|$ つまり $\|A^{-1}\|\leqq 1/\alpha$ を得る．〔こんな注をつけるくらいならむしろ Neumann 級数を用いて逆作用素が実際構成できることをいうべきである.〕

$$[A+\varepsilon B-\mu-l]^{-1}=[A-\mu-l]^{-1}[1+T]^{-1}$$

は存在し有界である．ゆえに

$$\frac{d}{2+\sigma}<l<\frac{1+\sigma}{2+\sigma}d$$

の範囲の l に対しては点 $\mu+l$ は作用素 $A+\varepsilon B$ のレゾルベント集合に属する．

解析的な場合(Riesz–Sz. Nagy[1])になされたのと同様に公式(2.2)を，点 μ を囲む作用素 $A+\varepsilon B$ のレゾルベント集合内の閉路に沿って積分することができる．これより，この閉路内で作用素 $A+B$ のスペクトルは離散的でこれらに対応する固有函数空間の次元が点 μ の重複度に等しいことが Riesz–Sz. Nagy [1]と同様に結論される．また，点 μ を中心とする半径 $d/(2+\sigma)$ の円に含まれる作用素 A の固有値とこれに対応する固有函数に対する摂動論的級数が収束することもこれと同様にわかる．証明終わり．

視野の半径の定義における定数を $\alpha=d/(2+\sigma)$ ととろう．このとき(2.1)により $\varepsilon|\bar{v}(x,\varepsilon)|\leqq\varepsilon|v(x_\varepsilon,\varepsilon)|\leqq d/(2+\sigma)$ であるから，作用素 $\hat{L}^0+\varepsilon\bar{v}(x,\varepsilon)$ の固有函数や固有値に対する摂動論的級数は収束する．

3° 基本命題

次のような命題が成立する．

1) 〔λ^0 を $\hat{L}^0$ の単純固有値とする.〕 Γ を点 λ^0 を中心とする半径 $d/2$ の円周とするとき，作用素

$$\frac{1}{2\pi i}[\hat{L}^0+\varepsilon\bar{v}(x,\varepsilon)]\oint_\Gamma[\hat{L}^0-z]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k[\bar{v}(x,\varepsilon)(\hat{L}^0-z)^{-1}]^k dz$$

はただ一つの単純固有値 $\mu(\varepsilon)$ と固有函数 $\varphi(x,\varepsilon)$ とを有する．

2) 方程式

$$[\hat{L}^0+\varepsilon v(x,\varepsilon)]\psi_\lambda=\lambda\psi_\lambda$$

の解 ψ_λ が不等式

$$\int_{-x}^{x}|\psi_\lambda|^2dx\leqq C\exp(\delta x/2) \tag{2.3}$$

を満たすとする．ここに $\delta>0, C>0$ は ε に依らない定数である．λ^0 を λ に最も近い(二つあればどちらでもよい)作用素 $\hat{L}^0$ の単純固有値とすれば，次の関係

が成り立つ[1]．

$$\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon}\left|\left\{1-\frac{1}{2\pi i}\oint[\hat{L}^0-z]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k[\bar{v}(x,\varepsilon)(\hat{L}^0-z)^{-1}]^k dz\right\}\psi_\lambda\right|^2 dx$$
$$\leqq \sigma^2(\varepsilon) \tag{2.4}$$

$$|\lambda-\mu(\varepsilon)|^2\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon}|\psi_\lambda|^2dx \leqq \sigma^2(\varepsilon) \tag{2.5}$$

ここに $\sigma^2(\varepsilon)=C_1\exp\left\{-(2-\delta)\int_0^{x_\varepsilon}\sqrt{|\lambda^0-u(x)|}\,dx\right\}$

この命題は第2章で証明される定理[2]の部分的な場合なのでここで特に証明することはせず，その物理的な意味を明らかにするにとどめよう．

第1に，解 $\psi_\lambda(x)$ に対する条件(2.3)は，$\varepsilon\to0$ のとき ∞ にならないような $\psi_\lambda(x)$ の正規化をもたらす．第2に，同じ条件は $\hat{L}^0+\varepsilon v(x,\varepsilon)$ の形の本質的自己共役作用素の離散あるいは連続スペクトルの固有函数を含むような解のあるクラスを定義する．しかしわれわれは和 $\hat{L}^0+\varepsilon v(x,\varepsilon)$ の本質的自己共役性は仮定せず，代わりに条件(2.3)を要請することにする．そうしないと非調和振動子の問題のようなものまで定理の条件を満たさなくなってしまうからである．

関係式(2.4)および(2.5)は次のような意味をもつ．

1) もしも ε に依らない定数 δ に対し $|\lambda-\mu(\varepsilon)|\geqq\delta>0$ ならば，視野内において(すなわち領域 $|x|\leqq r_\varepsilon$ において)粒子を発見する確率は装置の測定にかからないほど小さい．

2) もしも視野内においてレベル λ に粒子を発見する確率が ε に依らぬある定数 δ より大きければ(すなわち $\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon}|\psi_\lambda|^2dx\geqq\delta>0$ ならば)，装置の精度の範囲内で λ は $\mu(\varepsilon)$ に等しく，また視野内において固有函数 ψ_λ は(われわれの精度の範囲内で)摂動論的級数で表わされる．

このように，もしも量 $\sigma(\varepsilon)$ がわれわれの問題において無視できれば，摂動論によって完全な解答が得られるのである．

これらの結果を定式化するにあたり，前もって二つの函数の差が $\sigma(\varepsilon)$ を越えないものを同一視しておくのが便利である．そのような量はわれわれの装置で

---

1)　このようにして，λ が与えられれば作用素 $\hat{L}^0$ のスペクトル λ^0 と λ^0 から $\hat{L}^0$ の他のスペクトルへの最短距離 d とが定まる．次いで d と $v(x,\varepsilon)$ とから視野の半径 $r_\varepsilon=x_\varepsilon/2$ が不等式 $\varepsilon|v(x,\varepsilon)|\leqq d/(2+\sigma)$, $(|x|\leqq x_\varepsilon)$ を用いて定められる $(\sigma>0)$.

2)〔訳注〕 定理2.3を2階の方程式に対して書き直したもの．

は仮定により異なる量ではないからである．このために x と ε の函数の空間 $L_2(\varepsilon)$ で，x につき $-r_\varepsilon<x<r_\varepsilon$ で2乗可積分，ε については連続であるようなものを考えよう[1)]．この空間において差が掛け算作用素 $1/\sigma(\varepsilon)$ の定義域に含まれるような2元を同一視することにより商空間 $S=L_2(\varepsilon)/\sigma(\varepsilon)$ を作る．この商空間における等号を記号 $\underset{S}{=}$ で表わすことにしよう．たとえば関係式(2.5)は次のように書かれる[2)]．

$$|\lambda-\mu(\varepsilon)|\sqrt{\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon}|\psi_n|^2dx}\underset{S}{=}0.$$

このように，非調和振動子の問題は商空間 S においてのみ意味を持つ．

4° 正の摂動の場合

われわれは第2章において摂動 $v(x,\varepsilon)>0$ ならば $\psi_\lambda(x)$ は視野の外では

$$C\exp\left\{-(1-\delta)\int_0^x\sqrt{|\lambda-u(x)|}\,dx\right\}$$

よりも速く0に近づくことを証明する[3)]．ゆえにこのときには不等式(2.4)，(2.5)の左辺の積分は $-\infty$ から $+\infty$ までとることができる．このとき一つの点 $\mu(\varepsilon)$ には方程式 $[\hat{L}^0+\varepsilon v(x,\varepsilon)]\psi_\lambda=\lambda\psi_\lambda$ の固有値で条件(2.5)を満たすものは明らかにただ一つしか対応しない．実際，もし同一の $\mu(\varepsilon)$ に対し(2.5)を満たす λ_1,λ_2 が二つあったとすれば[4)]

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|c_2\psi_{\lambda_1}-c_1\psi_{\lambda_2}|^2dx&=\int_{-\infty}^{\infty}|c_2(\psi_{\lambda_1}-c_1\varphi(x,\varepsilon))-c_1(\psi_{\lambda_2}-c_2\varphi(x,\varepsilon))|^2dx\\&\leqq 2|c_2|^2\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{\lambda_1}-c_1\varphi(x,\varepsilon)|^2dx+2|c_1|^2\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{\lambda_2}-c_2\varphi(x,\varepsilon)|^2dx\\&\leqq 4\sigma^2(\varepsilon)(|c_1|^2+|c_2|^2)\end{aligned}\tag{2.6}$$

となる[5)]．一方，ψ_{λ_1} と ψ_{λ_2} は直交しているから

$$\int_{-\infty}^{\infty}|c_2\psi_{\lambda_1}-c_1\psi_{\lambda_2}|^2dx=|c_1|^2+|c_2{}^2|.$$

---

1)〔訳注〕 例えば $\|f(x,\varepsilon)\|=\sup_\varepsilon\sqrt{\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon}|f(x,\varepsilon)|^2dx}$ をノルムとすればよい．

2)〔訳注〕 この式の左辺は ε だけの函数である．$(\lambda-\mu(\varepsilon))\psi_n(x)\underset{S}{=}0$ と書いた方が定義にかなっている．

3)〔訳注〕 定理2.1の系，したがって ψ_λ は真の固有函数となる．

4)〔訳注〕 これらに対応する正規化された固有函数 $\psi_{\lambda_1},\psi_{\lambda_2}$ の，$\mu(\varepsilon)$ に対応する固有函数 $\varphi(x,\varepsilon)$ への射影をそれぞれ $c_1\varphi(x,\varepsilon),c_2\varphi(x,\varepsilon)$ として

5)〔訳注〕 (2.4)の左辺の被積分函数は序論の(0.5)式により $\psi_{\lambda_1}-c_1\varphi(x,\varepsilon)$ 等に等しいことに注意．

したがって(2.6)より

$$|c_1|^2+|c_2|^2 \leqq 4\sigma^2(\varepsilon)\{|c_1|^2+|c_2|^2\}$$

を得るがこれは不合理である．

不等式(2.4)および(2.5)は，区間 $\lambda^0-d/2\leqq\lambda\leqq\lambda^0+d/2$ に摂動方程式 $\hat{L}^0+\varepsilon v(x,\varepsilon)$ のスペクトルで，対応する固有函数の2乗の視野における積分が $\varepsilon\to0$ のとき0に近づかないようなものが存在するかどうかについては何も語っていない．しかし Rellich の定理(第3章§2-3° を見よ)によれば摂動作用素 $A+\varepsilon B$ のスペクトル族(単位の分解) $E_\lambda{}^{A+\varepsilon B}$ が $\varepsilon\to0$ のとき非摂動作用素 A のスペクトル族 $E_\lambda{}^A$ に強収束するから，いま

$$E_\Delta = E_{\lambda^0+d/2}-E_{\lambda^0-d/2}, \qquad \Delta=\{\lambda^0-d/2, \lambda^0+d/2\}$$

と書けば

$$E_\Delta{}^{A+\varepsilon B}\to E_\Delta{}^A$$

となる．(記号 → は強収束を表わす．強収束については第2章§1を見よ．) 区間 Δ には作用素 A のスペクトル λ^0 があるので，これに対応する正規化された固有函数を ψ^0 とすれば明らかに，$E_\Delta{}^A\psi^0=\psi^0$，すなわち $(\psi^0, E_\Delta{}^A\psi^0)=\|\psi^0\|^2=1$ となる．したがって Rellich の定理により

$$(\psi^0, E_\Delta{}^{A+\varepsilon B}\psi^0)\to1 \qquad (\varepsilon\to0).$$

一方

$$\left|\int_{|x|\geqq r_\varepsilon}\psi^0E_\Delta{}^{A+\varepsilon B}\psi^0dx\right| \leqq \sqrt{\int_{|x|\geqq r_\varepsilon}|\psi^0|^2dx}\sqrt{\int_{|x|\geqq r_\varepsilon}|E_\Delta{}^{A+\varepsilon B}\psi^0|^2dx}\to0 \quad (\varepsilon\to0)$$

であるから，これより

$$\int_{|x|\leqq r_\varepsilon}\psi^0E_\Delta{}^{A+\varepsilon B}\psi^0dx\to1 \qquad (\varepsilon\to0) \tag{2.7}$$

を得る．この式から固有値 λ^0 に対し少くとも一つの〔$A+\varepsilon B$ の固有値 λ とその〕固有函数 ψ_λ で $\varepsilon\to0$ のとき $\lambda\to\lambda^0$ となり，かつ

$$\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon}|\psi_\lambda(x)|^2dx$$

が $\varepsilon\to0$ のとき0に収束しないものが対応していることがわかる．何となれば，もしそうでないとすれば

$$\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon}|E_\Delta{}^{A+\varepsilon B}\psi^0|^2dx\to0 \qquad (\varepsilon\to0)$$

となってしまい，(2.7)に反する．

以上をまとめると，不等式(2.4)，(2.5)の系として次のことが証明された．

系 $v(x,\varepsilon)>0$ とすれば，作用素 $\hat{L}^0$ の各固有値 λ^0 に対し次の性質を満たすような作用素 $\hat{L}$ の固有値がただ一つ対応する：

$$|\lambda-\mu(\varepsilon)| \leqq C\exp\left\{-(1-\delta)\int_0^{r_\varepsilon}\sqrt{|\lambda^0-u(x)|}\,dx\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_\lambda-c_\lambda(\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)|^2dx \leqq C\exp\left\{-2(1-\delta)\int_0^{r_\varepsilon}\sqrt{|\lambda^0-u(x)|}\,dx\right\}.$$

同様の系は，3° に述べた命題の多次元の場合に相当する定理に対しても成り立つ(第2章を見よ)．それはその場合に対する Titchmarsh[1]の結果(Бреховских[2]をも参照せよ)の精密化になっている．

§3 装置の分解能

さて，$L_2[\boldsymbol{R}^1]$上の自己共役作用素

$$A=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2 \tag{3.1}$$

に作用素 $i\varepsilon d^3/dx^3=\varepsilon B$ による摂動が加えられたと仮定しよう．もしも p-表現に移るならば，すなわち Fourier 変換を施すならば，

$$A+\varepsilon B=-\frac{d^2}{dp^2}+p^2+\varepsilon p^3 \tag{3.2}$$

となる．これはすでに上に考察したものである．

視野の半径はこの場合

$$\rho_\varepsilon=\frac{\text{const}}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \tag{3.3}$$

に等しい．視野の境界付近に粒子が存在する確率は $O(\exp(-\text{const}/\varepsilon^{2/3}))$ 程度である．したがって前の分節で述べたように，非摂動作用素 A の離散レベルの摂動 εB によるずれをちょうどこの程度の精度をもって $\mu(\varepsilon)$ に対する収束級数の形に表わすことができる．

この場合の物理的解釈は次のようになる．われわれの装置は運動領域において有界な視野をもつのである．すなわち，$O(1/\sqrt[3]{\varepsilon})$ の程度の運動量を持った粒子は観測されない．粒子がそのような運動量を持つ確率は $O(\exp(-\text{const}/\varepsilon^{2/3}))$

に等しいからである.

ところがこのことから直ちに, Heisenberg の不確定性原理により装置は粒子の位置を正確に決めることができないことになる. つまり, 運動量領域において視野の半径が ρ_ε の程度なら, 位置に関する分散(あるいは装置の分解能)は $1/\rho_\varepsilon$ の程度になる.

実際, 粒子が点 x_0 に見出されたとすれば, その粒子の状態(波動函数)は $\delta(x-x_0)$ の形である. ところが, $\delta(x-x_0)$ の Fourier 積分展開における周波数の高い ($|p|>|\rho_\varepsilon|$ の) 部分はわれわれの装置では観測されないのであるから, 結局われわれの装置は粒子の位置 $x=x_0$ を正確に復元することができないのである.

この事実はある種の具体的な実験についてはまた次のようにも解釈することができる. われわれが点 x_0 に対して測定を実行するというとき, これはわれわれの装置が点 x_0 をねらうということを意味している. しかし, 装置は一般には点 x_0 自身を正確にとらえるというわけにはゆかず, これに十分近い別の点をとらえることもあり得る. 実際に装置が与えられた点 x_0 自身を測定するのはある確率のもとにおいてのみ実現する.

装置が点 x_0 において測定を行なうときの確率密度は, 原則的には点 $x=x_0$ に極大をもち, その点に関して対称である[1].

線型作用素の摂動に関連した問題においては, 一般に分解密度 $G(x-\xi,\sigma)$ の作り方には大きな自由性があり, ただ分解能 σ の大きさの程度だけが一意に定まる(第5章補題5.4を見よ). 上に述べた例においては明らかに,

$$G(x-x_0,1/\rho_\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\rho_\varepsilon,p)e^{ipx}dp\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ip\xi}\delta(\xi-x_0)d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\rho_\varepsilon,p)e^{ip(x-x_0)}dp \tag{3.4}$$

となる. ここに $P(\rho_\varepsilon,p)$ は, $|p|<\rho_\varepsilon$ では誤差 $o(\varepsilon)$ の程度で1に等しく, $|p|>2\rho_\varepsilon$ では同程度の誤差で0に等しいような任意の滑らかな函数でよい. ここに得られた函数 $G(x-\xi,1/\rho_\varepsilon)$ は幅が $1/\rho_\varepsilon$ 程度の‘尾のついた(ぼやけた)’ δ 函数である.

装置がある量 $f(x)$ を測定しているとしよう. すなわちわれわれは点 x を指

1)　この解釈はいささか便宜的である. 函数 $G(x-\xi,\sigma)$ の正確な物理的議論は Klein-Gordon の空間における位置作用素の固有函数を論じる場合と似たものになる(Schweber [1]).

定している．しかし装置が示す値は実際には他の点で測定されたものである．したがって量 $f(x)$ の平均値 $\bar{f}(x)$ が，この量に関して得られる最良の情報である．いまの例においては

$$\bar{f}(x)=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin c\dfrac{x-\xi}{\sqrt[3]{\varepsilon}}}{x-\xi}f(\xi)d\xi$$
$$=\int_{-c/\sqrt[3]{\varepsilon}}^{c/\sqrt[3]{\varepsilon}}e^{ipx}dp\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ip\xi}f(\xi)d\xi \tag{3.5}$$

である．

われわれが測定しようとしている摂動作用素の固有函数 $\psi_\lambda(x)$ は ε に依存した量である．ε を固定するごとにわれわれの測定は点 x への‘命中’の‘分解密度’ $G(x-\xi, 1/\rho_\varepsilon)$ をもって行なわれ，平均値

$$\varphi(x,\varepsilon)=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin c\dfrac{x-\xi}{\sqrt[3]{\varepsilon}}}{x-\xi}\psi_\lambda(\xi)d\xi \tag{3.6}$$

が得られる．(3.6)に類似の正則化がなされた摂動論的級数は $O(\exp(-c/\varepsilon^{2/3}))$ 程度の誤差で函数 $\varphi(x,\varepsilon)$ の近似と，これに対応するスペクトルの点 λ(そのレベルにおいて $\varphi(x,\varepsilon)$ が 0 に収束しないような $\lambda=\lambda_\varepsilon$)の近似とを与える．以上に述べたことを総合すれば，量 $\varphi(x,\varepsilon)$ を決定することが，まさに物理学者の欲するところである．

ここでの考察は直ちに一般の場合に移される．このようにして物理学者は，1) これから摂動を加える系，すなわち(離散スペクトルを持つ)非摂動方程式を記述し，2) 摂動を定義する，すなわち摂動方程式を記述し，3) その観測にあたってこのような摂動の影響は小さいことを確かめるならば，上に述べた摂動論の正則化の方法を用いて物理学者の測定結果の〔摂動による〕変化を定量的に計算することができ，また彼の装置の視野と分解能(すなわち，位置を決定するための確率密度の分散)とを示すことができるのである．

§4　一般の自己共役作用素に対する問題設定

視野の半径とか精度とかの概念は任意の自己共役作用素に一般化することができる．Hilbert 空間 H の(一般に非有界な)自己共役作用素 A を考えよう．λ^0

を作用素 A の有限重複度 m の孤立スペクトルとし，d を λ^0 から他のスペクトルまでの距離とする．

$$[A+\varepsilon f(\varepsilon, B)]\psi=\lambda\psi$$

の形の摂動方程式を考えよう．ここに B は自己共役作用素で，$f(\varepsilon, \mu)$ は各 μ を固定したとき $0\leqq\varepsilon\leqq\varepsilon_0$ の範囲で有界な函数であり，点 λ はこれに最も近い作用素 A のスペクトルが λ^0 であるような位置にあるとする．この場合正則化とは作用素 B に関する高周波部分を切り捨てることである．

$\alpha>0$ とし，不等式 $f(\varepsilon, \mu)\leqq d/(2+\alpha)\varepsilon$ が成り立つような最大の領域を $|\mu|\leqq\mu(\varepsilon)$ とする（たとえば，$f(\varepsilon, B)=B$ なら $\mu(\varepsilon)=d/(2+\alpha)\varepsilon$ である）．$r_\varepsilon=\mu(\varepsilon)/2$ を B の領域における視野の半径とよぼう．さて，作用素 $A+\varepsilon f(\varepsilon, B)$ は自己共役とし，ψ_λ をその一般固有函数で，〔有限〕区間 $\varDelta$ を任意に定めたとき汎函数 $(E_\varDelta{}^B g, \psi_\lambda)$ が任意の $g\in H$ に対して意味を持つようなものとしよう．したがって

$$(E_\varDelta{}^B g, \psi_\lambda)=(g, f)$$

となる $f\in H$ が決まるが，$f=E_\varDelta{}^B\psi_\lambda$ と定義する．ψ_λ を

$$\|E_\varDelta{}^B\psi_\lambda\|\leqq C(\varDelta)$$

となるように正規化しておこう．ここに $C(\varDelta)$ は ε に依らぬ定数である．

定義　族 $\varphi(\varepsilon)$ が作用素 B の領域で弱い意味で 0 に収束するとは任意の〔有限〕固定区間 $\varDelta=[\lambda_1, \lambda_2]$ に対し $E_\varDelta{}^B\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon\to0$ のとき 0 に強収束することをいう $(E_\varDelta{}^B=E_{\lambda_2}{}^B-E_{\lambda_1}{}^B)$.

われわれに興味があるのは区間 $\varDelta$ 自身が ε に依存して $\varDelta_\varepsilon=[-r_\varepsilon, r_\varepsilon]$ となっている場合であり，さらにある函数 $\varphi(\varepsilon)$ に対して $\|E_{\varDelta_\varepsilon}{}^B\varphi(\varepsilon)\|$ という表現が $\varepsilon\to0$ のとき，ただ 0 に収束するというだけでなく，この量の微小さの程度の評価が必要である．

さて，$\mu_j(\varepsilon)$ $(1\leqq j\leqq m)$ を次の作用素の固有値としよう．

$$R=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma(A+\varepsilon E_{\varDelta_\varepsilon}{}^B f(\varepsilon, B))(A-z)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k[(E_{\varDelta_\varepsilon}{}^B f(\varepsilon, B)(A-z)^{-1}]^k dz.$$

ここに Γ は点 λ^0 を中心とする半径 $d/2$ の円周である．$\varepsilon E_{\varDelta_\varepsilon}{}^B f(\varepsilon, B)$ のノルムは作り方から $d/(2+\alpha)$ 以下であり，したがって補題 1.1 により積分記号下の級数は収束し，R は階数 m の完全連続作用素となる（すなわち全部で m 個の固有函数をもつ）．

上に述べられた結果や第2章の結果に関連して次のような仮説が浮かび上がる：上に挙げられた諸仮定の下に任意の j $(1\leqq j\leqq m)$ に対し

$$|\lambda-\mu_j(\varepsilon)|\,\|E^B{}_{\Delta_\varepsilon}\psi_\lambda\|\leqq C\|(1-E^B_{\Delta_\varepsilon(1-\delta)})E^A_{\lambda^0-d/2,\,\lambda^0+d/2}\psi_\lambda\|$$

の形の不等式が成り立つ[1)]．ここに C は ε に依らないある定数である．

1)〔訳注〕 $E^B_{\Delta_\varepsilon(1-\delta)}$ は区間 $[-(1-\delta)r_\varepsilon,(1-\delta)r_\varepsilon]$ に対応する B の射影作用素のことであろう．この主張は微分作用素の場合の第2章定理2.3の一般化だが本書では証明されていない．‘仮説(гипотеза)’ はopen problem を意味するのであろう．

第2章　固有函数の無限遠における挙動と作用素係数の方程式に対する摂動定理

§1 作用素論におけるいくつかの基本的事実

われわれはある Banach 空間 B_1 から別の Banach 空間 B_2 への線型作用素(一般に非有界)を考察しよう．線型作用素

$$v = Au$$

は，ある線型部分空間 $D(A)\subset B_1$ において定義され，値を B_2 にとる写像で，線型性

$$A(\alpha u_1+\beta u_2) = \alpha Au_1+\beta Au_2$$

を満たすものである．

A の値域，すなわち集合

$$\{Au\,;\,u\in D(A)\}$$

を $R(A)$ で表わす．作用素 A は $u_n\to u$ から $Au_n\to Au$ が従うとき連続であるという．また作用素 A は，もし

$$\sup_{\substack{u\in D(A)\\ u\neq 0}}\frac{\|Au\|}{\|u\|} < \infty$$

のとき有界であるといい，$\sup_{\substack{u\in D(A)\\ u\neq 0}}\frac{\|Au\|}{\|u\|}$ を作用素 A のノルムといい $\|A\|$ で表わす．よく知られているように線型作用素の連続性と有界性は同値である．もし作用素 A が連続ならば，連続性により閉部分空間 $\overline{D(A)}$ まで拡張できる．$\overline{D(A)}$ を B_1 の代わりに考察すれば，有界作用素は全空間で定義されているものとみなしうる．

ある有界作用素の系 $\{A_\alpha\}$ に対して，正の定数 M があって，$\|A_\alpha\|\leqq M$ が成り立つとき，$\{A_\alpha\}$ を一様に有界であるという．

作用素 A に対して，もし $u_n\to u, Au_n\to v$ ならば，$u\in D(A)$ であり，$Au=v$ が成り立つとき，A を閉作用素という．すべての有界作用素は閉作用素であり，一般に逆は成立しない．

作用素 $\tilde{A}$ は $D(A)\subset D(\tilde{A})$ でかつ $Au=\tilde{A}u$ がすべての $u\in D(A)$ に対して成り立つとき，A の拡張であるといわれる．

以下において，常に閉作用素あるいは閉拡張の存在する作用素を考察する．もし作用素 A が閉拡張をもつならば A の最小の閉拡張が存在する．それを A の閉包といい，$\bar{A}$ で表わす．

もし，作用素 A の定義域 $D(A)$ が空間 B_1 において稠密ならば，一意的に B_2 の共役空間 $B_2{}^*$ から B_1 の共役空間 $B_1{}^*$ への作用素 A^* で，次の条件を満たすものが定義される：すべての $u\in D(A)$ に対して

$$(Au,\psi)=(u,A^*\psi)\qquad(\psi\in B_2{}^*).$$

A^* を A の共役作用素という．共役作用素は常に閉じていることは容易にわかる．もし作用素 A の零空間 $N(A)=\{u\,;\,Au=0\}$ が $u=0$ にかぎるならば，$R(A)$ 上で定義された逆作用素 A^{-1} が存在し $R(A^{-1})=D(A)$ である．閉作用素の定義から A の閉性と A^{-1} の閉性は同値である．また定義域 $D(A)$ が B_1 全体に等しい閉作用素は有界作用素である．

A を Hilbert 空間 H における稠密な定義域 $D(A)$ をもつ閉作用素とする．そのとき $B=[I+A^*A]^{-1}$ は有界な正の自己共役作用素で $\|B\|\leqq 1$ である．作用素 AB もまた有界作用素で $\|AB\|\leqq 1$ である．$D(A^*)$ と $D(A^*A)$ は H において稠密であり，作用素 A^{**} は A に等しい．

以下においてしばしば用いる作用素の収束の概念を述べよう．線型作用素の収束は異なった方法で定義できる．われわれには以下に述べる収束の概念が重要である．

$\{A_n\}$ を有界作用素の列とするとき，もし $\|A_n-A\|\to 0\ (n\to\infty)$ ならば A_n は A に一様収束するという．必ずしも有界とは限らない共通の定義域 D をもつ作用素の列 $\{A_n\}$ は，もしすべての $u\in D$ に対して $\|A_nu-Au\|\to 0\ (n\to\infty)$ ならば，A に D 上で強収束するといわれる．またすべての $u\in D$ に対して $\{A_nu\}$ が Au に弱収束するとき，A_n は D において A に弱収束するという．いいかえるとすべての $\psi\in H$ と $u\in D$ に対して $(A_nu,\psi)\to(Au,\psi)$ を意味する．これら三つの収束については

$$\text{一様収束}\Rightarrow\text{強収束}\Rightarrow\text{弱収束}$$

の関係がある．

有限次元空間においてはこれらの収束は同じであり，無限次元空間において差異を生ずる．

あとの説明のために，線型作用素および函数の収束に関するよく知られた必要な事実をかかげよう．

1)　Banach–Steinhaus の定理　$\{A_n\}$を一様に有界な B_1 から B_2 への作用素とする．すなわち $\|A_n\|\leqq M$ がすべての n に対して成り立っているとする．B_1 において稠密なある集合のすべての元 f に対して $\|Af_n-Af\|\to 0$ ならば，すべての $f\in B_1$ に対して $\|A_nf-Af\|\to 0$ (Hille–Phillips[1])．

2)　もし $f_n\in B_1$ が弱収束するならば$\{f_n\}$は有界である(Колмогоров–Фомин[1], Hille–Phillips[1])．

3)　回帰的 Banach 空間においては，すべての有界集合は相対的に弱コンパクトである(Hille–Phillips[1])．

4)　一様に凸な Banach 空間においては，f_n が f に弱収束し，$\|f_n\|$ も $\|f\|$ に収束するならば f_n は f に強収束する(Колмогоров–Фомин[1])．

5)　Lebesgue の定理　可測函数 $f_n(t)$ がほとんどすべての点で $f(t)$ に収束し，かつある可積分函数 $g(t)$ に対して $|f_n(t)|\leqq g(t)$ が成り立つならば

$$\int_0^1 f_n(t)dt \to \int_0^1 f(t)dt \qquad (n\to\infty)$$

である(Natanson[1])．

以下において，ある Banach 空間(特に Hilbert 空間)に値をとる函数空間における作用素を考察する．函数空間の構造としては次の三つの場合が重要である．

a)　B_1 を Banach 空間とする．B_1 に値をとる区間$[0, s]$で定義された連続函数の全体を $C[B_1]$で表わす．$C[B_1]$はノルム

$$\|u(t)\|_{C[B_1]}=\sup_{0\leqq t\leqq s}\|u(t)\|_{B_1}$$

で Banach 空間となる．もし $T(t)$ $(0\leqq t\leqq s)$ が空間 B_1 における作用素半群ならば $T(t)$ は B_1 から $C[B_1]$への作用素と考えることができる(Hille–Phillips[1])．

b)　H を Hilbert 空間とし，$L_2[H]$でもって H に値をとる可測函数で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|h(t)\|_H{}^2 dt < \infty$$

となるものの全体を表わす．$L_2[H]$は内積

$$(h(t), g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (h(t), g(t))_H dt$$

でもって Hilbert 空間となり，Hが可分ならば$L_2[H]$も可分である．次の部分積分に関する事実を注意しておこう．もし$h(t), g(t) \in L_2[H]$でかつ$h'(t), g'(t) \in L_2[H]$とすると

$$\left(\frac{d}{dt} h(t), g(t)\right) = -\left(h(t), \frac{dg(t)}{dt}\right)$$

が成り立つ．この式は，ふつうの複素数値函数の場合と同様に示せる．有界な台をもつ滑らかな函数で$h(t), g(t)$の1階導函数まで$L_2[H]$のノルムで近似することができるという事実にもとづく．

c)　Bを Banach 空間とする．区間$[0, s]$で定義されたB値函数で$\|u(t)\|_B$がtについて可積分であるような函数の全体を$L_1[B]$で表わす．$L_1[B]$はノルム

$$\|u(t)\|_{L_1[B]} = \int_0^1 \|u(t)\|_B dt$$

で Banach 空間となる．$L_1[B]$の函数は Bochner 可積分な函数ともいわれる．$L_1[B]$において単函数は稠密である (Hille–Phillips[1])．

§2　解の評価の基本的方法

例　解の評価を得る方法の基本的考えをまず例によって示そう．$L_2[\boldsymbol{R}^2]$において作用素

$$\hat{L} = A\frac{\partial}{\partial x} + B = A(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + B\left(x, y, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

を考えよう．ここで$B\left(x, y, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$は$x$と可換な作用素で，$A(x, y)$は$|A(x, y)| \leqq 1$なる函数とする．$\hat{L}^{-1}$が存在して有界であると仮定しよう．

$$\|\hat{L}^{-1}\| \leqq N.$$

$f(x, y)$を$L_2[\boldsymbol{R}^2]$に属し，$x \geqq \tilde{x}$で$f(x, y) = 0$を満たす函数とし，uを

$$\hat{L}u = f(x, y)$$

の解とする．もし区分的に可微分な函数$\varphi(x)$が$\varphi(x)f(x, y) = 0$を満たすなら

ば

$$\hat{L}(\varphi u)=\hat{L}(\varphi u)-\varphi f=[\hat{L},\varphi]u=A\varphi_x{}'u$$

となる（$[\hat{L},\varphi]$は $\hat{L}$ と φ の交換子を表わす）．したがって

$$\|\varphi u\|^2\leqq N^2\|\varphi_x{}'u\|^2.$$

$\varphi(x)$ として

$$\varphi(x)=\begin{cases}(x-\xi)^k & (x>\xi)\\ 0 & (x\leqq\xi)\end{cases}$$

をとろう．k は自然数で，$\xi>\tilde{x}$ とする．われわれは不等式

$$\begin{aligned}&\int_\xi^\infty(x-\xi)^{2k}dx\int_{-\infty}^\infty|u(x,y)|^2dy\\&\leqq N^2k^2\int_\xi^\infty(x-\xi)^{2k-2}dx\int_{-\infty}^\infty|u(x,y)|^2dy\end{aligned}\tag{2.1}$$

を得る．$k=1$ のとき，不等式(2.1)の右辺は収束する．積分

$$\int_\xi^\infty(x-\xi)^{2k-2}dx\int_{-\infty}^\infty|u(x,y)|^2dy$$

の収束性を仮定しよう．不等式(2.1)より

$$\int_\xi^\infty(x-\xi)^{2k}dx\int_{-\infty}^\infty|u(x,y)|^2dy$$

の収束が帰結される．結局(2.1)に現われるすべての積分は任意の正の整数 $k=n$ に対して収束することがわかる．

$$\Phi_n(\xi)=\int_\xi^\infty(x-\xi)^{2n}dx\int_{-\infty}^\infty|u(x,y)|^2dy$$

とおくと，不等式(2.1)から

$$\Phi_n(\xi)\leqq N^2\frac{n^2}{2n(2n-1)}\Phi_n{}''(\xi)$$

を得る．この不等式から積分

$$\int_\xi^\infty dx\int_{-\infty}^\infty|u(x,y)|^2dy$$

の十分大きい ξ に対する評価を得ることができる．n は任意に大きくとれるので，$n\to\infty$ のとき，零に収束する定数 δ_n がとれて

$$\Phi_n(\xi)\leqq\frac{N^2}{4}(1+\delta_n)\Phi_n{}''(\xi)$$

という式を得る．両辺に $\Phi_n{}'(\xi)$ を掛けて ξ から ∞ まで積分すれば，不等式

$$\Phi_n(\xi)^2 \leqq \frac{N^2}{4}(1+\delta_n)(\Phi_n{}'(\xi))^2$$

を得る．$\Phi_n(\infty)=0$ であるから

$$\Phi_n(\xi) \leqq \exp\{-2(1-\delta_n)(\xi-\xi_0)/N\}\,\Phi_n(\xi_0) \tag{2.2}$$

を得る．

評価式(2.2)において $\delta_n=0$ ととれる常微分方程式の例がある．$\hat{L}=d/dx+1$ とする．$\|\hat{L}^{-1}\|\leqq 1$ である．$x>a$ において $\hat{L}u=0$ とすると，そこでは $u=ce^{-x}$ であり

$$\int_\xi^\infty (x-\xi)^{2n}u^2dx = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}}ce^{-2\xi} \qquad (\xi > a)$$

が成り立つ．したがって

$$\Phi_n(\xi) = \exp\{-2(\xi-\xi_0)\}\,\Phi_n(\xi_0).$$

(2.2)から $\int_\xi^\infty u^2dx$ に対する評価が導かれる．なぜなら

$$\int_{\xi+1}^\infty dx\int_{-\infty}^\infty |u(x,y)|^2dy \leqq \int_{\xi+1}^\infty (x-\xi)^{2n}dx\int_{-\infty}^\infty |u(x,y)|^2dy$$
$$\leqq \int_\xi^\infty (x-\xi)^{2n}dx\int_{-\infty}^\infty |u(x,y)|^2dy = \Phi_n(\xi)$$

であることを用いるとよい．

注意1 作用素 B については，ただ $\varphi(x)$ と交換可能であることのみを要求しているのをみるのは容易であろう．A については有界性を要求している．それゆえ，B は x 以外の微分を含み，その係数はすべての変数に依っているような行列でも上述の議論は成り立つ．作用素 A については，すべての変数に依存している有界な成分をもつ行列で十分である．いいかえると $A(x), B(x)$ はある Hilbert 空間 H におけるパラメーター x に依存している作用素である．$g\in H$ のノルムを $\|g\|_H$ で表わそう．作用素 $\hat{L}=A(x)\dfrac{\partial}{\partial x}+B(x)$ を H の値をとる2乗可積分な函数の作る Hilbert 空間 $L_2[H]$ における作用素とみなせる．もし $A(x)$ と $B(x)$ が行列であるならば，元 $h\in L_2[H]$ は列ベクトル (h_ν) であり，ノルムは添字 ν に関する和で定義される．よって評価式(2.1)は x について1階の偏微分方程式系についても成り立つ．同様の方法は Banach 空間の場合にも応用できる．

注意2　公式(2.1)を導く際，われわれは $\hat{L}^{-1}$ の存在と有界性を要請した．しかしながら，$\varphi(x)$ が $x<\xi$ において零という条件のもとでは次に述べる $\hat{L}_\xi$ に対して $\hat{L}_\xi{}^{-1}$ が存在すれば十分である．$\hat{L}_\xi$ は $\hat{L}$ を $x<\xi$ において零となる函数に制限した作用素である．このとき，逆作用素のノルム $\|\hat{L}_\xi{}^{-1}\|=N(\xi)$ は ξ に依存するであろう．したがって，不等式(2.1)において N は $N(\xi)$ とすべきである．この注意は逆作用素をもたないような2階の作用素

$$\hat{L}=-\frac{d^2}{dx^2}+B(x)$$

を考察の対象とするようなとき重要となるであろう．この場合，もし $x>a$ において $B(x)>0$ であり，かつ $x>\xi\geqq a$ において $B(x)>N(\xi)^{-1}$ であるならば，$x<\xi$ において零となるような函数に対しては，$\hat{L}_\xi{}^{-1}$ が存在し，$\|\hat{L}_\xi{}^{-1}\|\leqq N(\xi)$ となる．

§3　作用素係数の2階の微分方程式

前節の方法を自己共役作用素の固有函数の評価を得るために応用しよう．Hilbert 空間 H の値をとる2乗可積分な函数からなる空間 $L_2[H]$ を考える．$L_2[H]$ は内積

$$(g_1, g_2)=\int_{-\infty}^{\infty}(g_1(x), g_2(x))_H dx$$

により Hilbert 空間となる．$L_2[H]$ において自己共役作用素

$$\hat{L}=-\frac{d^2}{dx^2}+B(x) \tag{3.0}$$

を考察しよう．$B(x)$ は掛け算作用素 x と可換であり，$g(x)\in D(B(x))$ について

$$\int_\xi^\infty (B(x)g(x), g(x))_H dx \geqq \alpha^2\int_\xi^\infty \|g(x)\|_H{}^2 dx \tag{3.1}$$

が十分大きい ξ について成り立っているとする．

定理2.1(Маслов[10])　λ を作用素 $\hat{L}$ の離散固有値とせよ．d を λ と離散的でないスペクトルとの距離とする．$a=\alpha^2-\lambda$ とおく．固有値 λ に対応するすべての $\hat{L}$ の固有函数 $\psi(x)$ は，不等式

$$\int_{\xi}^{\infty} \|\psi(x)\|_H{}^2 dx \leqq C(\delta) e^{-2(1-\delta)\omega\xi} \tag{3.2}$$

を満たす．ここで $\delta>0$ は任意の数，$C(\delta)$ は δ による定数で

$$\omega = [0.4\,a+(0.16\,a^2+0.2\,d^2)^{1/2}]^{1/2} \tag{3.3}$$ [1)]

である．

系 $\psi(x, y, z)$ を Schrödinger 方程式

$$-\Delta\psi+u(x, y, z)\psi = \lambda\psi$$

の固有函数とし

$$\varliminf_{x\to\infty} \inf_{y,z} u(x, y, z) > \alpha^2$$

と仮定する[2)]．よく知られているように(Глазман[1])，この場合，不等式

$$|\psi(x, y, z)|^2 = |\psi(P)|^2 \leqq C\int_{|P-Q|\leqq 1} |\psi(Q)|^2 dQ \tag{3.4}$$

が成り立つ．$|P-Q|$ は P と Q との距離を表わす．(3.2) と (3.4) から

$$|\psi(x, y, z)|^2 \leqq C\int_{x-1}^{\infty} dx' \iint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x', y', z')|^2 dy'dz' \leqq \tilde{C}(\varepsilon) e^{-2(1-\varepsilon)\omega x}$$

が成り立つ．ω は式(3.3)で与えられる定数である．

この評価式から Шноль[1]に得られた評価が得られる．

注意 H を $\boldsymbol{R}^1$ とする．$B(x)=u(x)\to 0\,(|x|\to\infty)$ としよう．そのとき $a=\alpha^2-\lambda=d$ であり，(3.3) より $\omega=\sqrt{a}$ を得る．この場合 $\psi(x)\sim e^{-\sqrt{a}\,x}$ である．この例においては $e^{-\omega x}$ で減少していることがわかる．

定理の証明のために次の補題が必要である．

補題 2.1 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ξ_ε が存在して，もし $g(x)\in D(\hat{L})$ でかつ $x\leqq\xi$ $(\xi>\xi_\varepsilon)$ において $g(x)=\hat{L}g(x)=0$ であるならば

$$(d-\varepsilon)^2\|g(x)\|^2 \leqq \|[\hat{L}-\lambda]g(x)\|^2 \tag{3.5}$$

が成り立つ．

証明 λ を多重度 p の固有値とし，$\psi_\lambda{}^i$ $(i=1, 2, \cdots, p)$ をその固有函数とする．ψ_{λ_k} を $\hat{L}$ の他の固有函数とする．次の不等式(3.6)を示そう．

---

1) このあとの注意を参照．

2)〔訳注〕 原書は $\inf_{x\to\infty} u(x, y, z) \geqq \alpha^2$ となっていたが改めた．

$$\|g(x)\|^2 \leqq \sum_{i=1}^{p}|(g,\phi_\lambda{}^i)|^2+\sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda\\|\lambda_k-\lambda|\leqq d-\varepsilon}}\left\{|(\phi_{\lambda_k},[\hat{L}-\lambda]g)|^2\times\left[\frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2}-\frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\|[\hat{L}-\lambda]g\|^2. \tag{3.6}$$

$f=(\hat{L}-\lambda)g$ とおき，R_λ で $\phi_\lambda{}^i\,(i=1,2,\cdots,p)$ の張る閉部分空間に対する直交補空間におけるレゾルベント作用素を表わすことにする．

$$\|g\|^2-\sum_{i=1}^{p}|(g,\phi_\lambda{}^i)|^2=\|g-\sum_{i=1}^{p}(g,\phi_\lambda{}^i)\phi_\lambda{}^i\|^2=\|R_\lambda f\|^2$$
$$=\|\sum_{\substack{|\lambda-\lambda_k|\leqq d-\varepsilon\\\lambda_k\neq\lambda}}(\phi_{\lambda_k},f)R_\lambda\phi_{\lambda_k}+R_\lambda\{f-\sum_{\substack{|\lambda-\lambda_k|\leqq d-\varepsilon\\\lambda_k\neq\lambda}}(\phi_{\lambda_k},f)\phi_{\lambda_k}\}\|^2$$
$$=\sum_{\substack{|\lambda-\lambda_k|\leqq d-\varepsilon\\\lambda_k\neq\lambda}}\frac{|(\phi_{\lambda_k},f)|^2}{(\lambda_k-\lambda)^2}+\|R_\lambda(f-\sum_{\substack{|\lambda-\lambda_k|\leqq d-\varepsilon\\\lambda_k\neq\lambda}}(\phi_{\lambda_k},f)\phi_{\lambda_k})\|^2$$
$$\leqq\sum_{\substack{|\lambda-\lambda_k|\leqq d-\varepsilon\\\lambda_k\neq\lambda}}\frac{|(\phi_{\lambda_k},f)|^2}{(\lambda-\lambda_k)^2}+\frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\{\|f\|^2-\sum_{\substack{|\lambda-\lambda_k|\leqq d-\varepsilon\\\lambda_k\neq\lambda}}|(\phi_{\lambda_k},f)|^2\}$$

を得る．これは(3.6)が成り立つことを示している．

$x\leqq\xi$ において $g(x)=0$ であれば

$$|(g,\phi_\lambda{}^i)|^2\leqq\int_\xi^\infty\|\phi_\lambda{}^i(x)\|_H{}^2dx\cdot\|g\|^2,$$
$$|([\hat{L}-\lambda]g,\phi_{\lambda_k})|^2\leqq\int_\xi^\infty\|\phi_{\lambda_k}(x)\|_H{}^2dx\cdot\|(\hat{L}-\lambda)g\|^2$$

が成り立つ．それゆえ(3.6)より

$$\|g(x)\|^2\leqq\|g\|^2\sum_{i=1}^{p}\int_\xi^\infty\|\phi_\lambda{}^i(x)\|_H{}^2dx+\frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\|(\hat{L}-\lambda)g\|^2$$
$$+\|(\hat{L}-\lambda)g\|^2\sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda\\|\lambda_k-\lambda|\leqq d-\varepsilon}}\int_\xi^\infty\|\phi_{\lambda_k}(x)\|_H{}^2dx\left\{\frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2}-\frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\right\}.$$

ξ_ε を十分大きくとると，$\xi>\xi_\varepsilon$ であれば

$$\|g(x)\|^2\leqq O_1(\varepsilon)\|g\|^2+O_2(\varepsilon)\|(\hat{L}-\lambda)g\|^2+\frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\|(\hat{L}-\lambda)g\|^2,$$
$$(d-\varepsilon)^2(1-O_1(\varepsilon))\|g\|^2\leqq(O_3(\varepsilon)+1)\|(\hat{L}-\lambda)g\|^2.$$

これより ε を取り直すことにより

$$(d-\varepsilon)^2\|g\|^2\leqq\|(\hat{L}-\lambda)g\|^2$$

を得る．これで補題2.1は示された．

定理の証明 $\varphi(x)$ を2回連続微分可能で，$x<\xi$ で零となる函数とする．

$$\|[\hat{L}-\lambda]\varphi(x)\psi(x)\|^2 = \|\varphi''\psi+2\varphi'\psi'\|^2$$
$$= \|\varphi''\psi\|^2+4(\varphi''\psi,\varphi'\psi')+4\|\varphi'\psi'\|^2. \tag{3.7}$$

一方，等式

$$2(\varphi''\psi,\varphi'\psi') = -([\varphi''\varphi']'\psi,\psi)$$
$$0=([\varphi']^2\psi,[\hat{L}-\lambda]\psi) = -([\varphi']^2\psi,\psi'')+([B-\lambda]\psi\varphi',\varphi'\psi)$$
$$= 2(\varphi'\varphi''\psi,\psi')+\|\varphi'\psi'\|^2+([B-\lambda]\varphi'\psi,\varphi'\psi) \tag{3.8}$$

が成り立つのは明らかであろう．(3.8)と条件(3.1)から，十分大きいξに対して

$$-\|\varphi'\psi'\|^2-2(\varphi'\varphi''\psi,\psi') \geqq a\|\varphi'\psi\|^2 \tag{3.8$'$}$$

が成り立つ．(3.5), (3.8), (3.8)′ と(3.7)より

$$(d-\varepsilon)^2\|\varphi\psi\|^2 \leqq \|\varphi''\psi\|^2+2([\varphi''\varphi']'\psi,\psi)-4a\|\varphi'\psi\|^2. \tag{3.9}$$

ここで $\varphi(x)=(x-\xi)^n$ $(x>\xi)$, $=0$ $(x\leqq\xi)$ とおくと

$$\Phi(\xi) = \|\varphi\psi\|^2 = \int_\xi^\infty (x-\xi)^{2n}\|\psi(x)\|_H{}^2dx$$

はすべての n に対して存在することが，帰納法により(3.9)よりわかる．不等式(3.9)は十分大きい $n>n_\varepsilon$ に対しては次のように書ける．

$$5\Phi^{(\mathrm{IV})}-16a\Phi''-16d^2(1-\varepsilon_1)\Phi \geqq 0. \tag{3.10}$$

左辺の作用素に対応する特性多項式の根 $\pm\beta, \pm\gamma$ は

$$\beta^2 = \frac{8a-\sqrt{64a^2+80d^2(1-\varepsilon_1)}}{5}$$

$$\gamma^2 = \frac{8a+\sqrt{64a^2+80d^2(1-\varepsilon_1)}}{5} = 4\omega^2(1-\varepsilon_2)$$

である．

$F(\xi)=\phi''-\beta^2\phi=\phi''+|\beta|^2\phi$ とおくと，式(3.10)から

$$F''-\gamma^2F \geqq 0 \tag{3.11}$$

が導かれる．F' を(3.11)の両辺に掛け $F(\infty)=F'(\infty)=0$ を用いて積分することによって

$$F'(\xi)^2 \geqq \gamma^2F(\xi)^2$$

を得る．$F'(\xi)\leqq 0$ であるから

$$F(\xi) \leqq Ce^{-\gamma\xi}.$$

すなわち

$$\Phi''+|\beta|^2\Phi \leqq Ce^{-\gamma\xi}.$$

$\Phi''(\xi)>0, \Phi(\xi)>0$ より

$$\Phi(\xi) \leqq C_1 e^{-\gamma\xi} \tag{3.12}$$

を得る．したがって

$$\int_\xi^\infty \|\psi\|_H{}^2 dx \leqq \Phi(\xi-1) \tag{3.13}$$

であるから

$$\int_\xi^\infty \|\psi\|_H{}^2 dx \leqq C_2(\varepsilon)e^{-\gamma\xi} = C_2(\varepsilon)e^{-2\omega(1-\varepsilon)\xi}.$$

よって主張は示された．

§4 1階の作用素

今まで述べた方法は，x について1階の自己共役作用素

$$\hat{L} = A\frac{d}{dx}+B(x) \qquad (\|A\|\leqq 1) \tag{4.1}$$

の固有函数の評価にも応用できる．特に定常 Dirac 方程式[1]の固有函数評価に応用できる．

λ を固有値とし，ψ を対応する $\hat{L}$ の固有函数とする．$\varphi(x)$ を C^2 で，$x<\xi$ において零となる函数とする．このとき

$$\left[A\frac{d}{dx}+B(x)-\lambda\right]\psi\varphi = A\varphi'\psi.$$

すなわち

$$[\hat{L}-\lambda]\psi\varphi = A\varphi'\psi$$

である．補題2.1より，十分大きい $\xi>\xi_\varepsilon$ に対して

$$(d-\varepsilon)^2\|\varphi\psi\|^2 \leqq \|A\varphi'\psi\|^2 \leqq \|\varphi'\psi\|^2.$$

以前と同様に，$\varphi(x)=(x-\xi)^n$ $(x\geqq\xi)$, $=0$ $(x<\xi)$ とし，$\Phi(\xi)=\|\varphi\psi\|^2$ とおくと，十分大きい $n>n_{\varepsilon_1}$ に対して

$$\Phi'' \geqq 4(d-\varepsilon_1)^2\Phi$$

を得る．これより

---

1) もし Dirac の方程式において係数が t に依らないとき，$\psi=e^{i\lambda t}\varphi$ とおいて φ に関する定常 Dirac の方程式を得る(Боголюбов–Ширков[1], Schweber[1])

$$\Phi(\xi) \leqq C_1 \exp\{-2(d-\varepsilon_1)\xi\}.$$

(3.13) より

$$\int_\xi^\infty \|\psi\|_H{}^2 dx \leqq C_2(\varepsilon_1) \exp\{-2(d-\varepsilon_1)\xi\}.$$

常微分作用素においては，$\varepsilon_1=0$ として評価できる例があることは容易にわかるであろう．

定理 2.2　作用素(4.1)の固有函数に対して，定理 2.1 と同じ結果が $\omega=d$ として成り立つ．

§5　固有函数に対する基本的評価

パラメーター η に依存する自己共役作用素

$$\hat{L} = A(\eta)\frac{d}{dx} + B(\eta, x), \qquad \|A(\eta)\| \leqq 1$$

を考察しよう．すでにたびたび用いたことだが，あらためて次のことを思い出しておこう．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\xi_\varepsilon>0$ が存在して，もし $x<\xi$ $(\xi \geqq \xi_\varepsilon)$ において $g(x)=\hat{L}g(x)=0$ ならば

$$(d-\varepsilon)^2\|g\|^2 \leqq \|(\hat{L}-\lambda)g\|^2 \tag{5.1}$$

が成り立つ．

与えられた作用素 $\hat{L}$ に対して ξ_ε を固定しよう．$x_0{}^\gamma=(\xi_\varepsilon)^\gamma$ とおく．ここで γ は任意の十分大きい数とする．平行移動することにより，$x_0{}^\gamma$ を座標の原点としよう．新しい座標系 $y=x-x_0{}^\gamma$ において函数

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} (y^2-\xi^2)^n & (\xi^2 \geqq y^2) \\ 0 & (y^2 > \xi^2) \end{cases}$$

を考えよう．$\xi \leqq x_0{}^\gamma - \xi_\varepsilon$ とすると，$x<\xi_\varepsilon$ ならば $x<x_0{}^\gamma-\xi$ である．すなわち $(x-x_0{}^\gamma)^2>\xi^2$．したがって $y^2 \geqq \xi^2$，これより $\varphi(y,\xi)$ は $x<\xi_\varepsilon$ において零である．作用素

$$\hat{L} = A(\eta)\frac{d}{dx} - B(\eta, x)$$

は新しい y 座標では

$$\hat{L} = A(\eta)\frac{d}{dy} - B(\eta, y+x_0{}^\gamma)$$

という形になる．$u(y)\in H$ を $|y|\leqq x_0{}^r-\xi_\varepsilon$ において方程式

$$A(\eta)\frac{du}{dy}-B(\eta, y+x_0{}^r)u = \lambda u$$

を満たしている函数とせよ．不等式(5.1)は $g(y,\xi)=\varphi(y,\xi)u(y)$ に対して成立することは明らかである．なぜなら，$x<\xi_\varepsilon$ において，$g=\hat{L}g=0$ であることより導かれる．よって

$$(d-\varepsilon)^2\|\varphi u\|^2 \leqq \|\varphi_y{}'u\|^2$$

が成り立つ．

$$\Phi(\xi) = \|\varphi u\|^2 = \int_{-\xi}^{\xi}(\xi^2-y^2)^{2n}\|u(y)\|_H{}^2dy$$

とおくと

$$\|\varphi_y{}'u\|^2 = \frac{n}{2(2n-1)}\left\{\Phi''-\frac{4n-1}{\xi}\Phi'\right\}$$

が成立することが容易にわかる．この等式より，$1/n=O(\varepsilon)$ とすると，$\xi\geqq 0$ で $\Phi'(\xi)>0$ であるから

$$(d-O(\varepsilon))^2\Phi \leqq \frac{1}{4}\Phi''-\frac{n-\dfrac{1}{4}}{\xi}\Phi' \leqq \frac{1}{4}\Phi''.$$

よって $O(\varepsilon)$ を改めて ε とおくと

$$\Phi'\Phi'' \geqq 4(d-\varepsilon)^2\Phi\Phi',$$

すなわち

$$\frac{d}{d\xi}(\Phi')^2 \geqq 4(d-\varepsilon)^2\frac{d}{d\xi}(\Phi)^2$$

を得る．ξ について積分して

$$\Phi' \geqq 2(d-\varepsilon)\Phi,$$

これより

$$\frac{d}{d\xi}\ln\Phi \geqq 2(d-\varepsilon).$$

再び，この不等式を $a>1$ から ξ まで積分すると

$$\ln\Phi(\xi)-\ln\Phi(a) \geqq 2(d-\varepsilon)(\xi-a),$$

すなわち

$$\Phi(\xi) \geqq e^{2(d-\varepsilon)(\xi-a)}\Phi(a)$$

を得る．よって

$$\int_{-a+1}^{a-1}\|u(y)\|_H{}^2dy \leqq \int_{-a}^{a}(y^2-a^2)^{2n}\|u(y)\|_H{}^2dy = \Phi(a)$$

$$\int_{-\xi}^{\xi}(y^2-\xi^2)^{2n}\|u(y)\|_H{}^2dy \leqq \xi^{4n}\int_{-\xi}^{\xi}\|u(y)\|_H{}^2dy$$

であるから，$\xi \leqq x_0{}^\gamma-\xi_\varepsilon$ であれば，$b=a-1$ とおくと，

$$\int_{-\xi}^{\xi}\|u(y)\|_H{}^2dy \geqq \xi^{-4n}\Phi(\xi) \geqq \xi^{-4n}e^{2(d-\varepsilon)(\xi-a)}\Phi(a)$$

$$\geqq C(a,\varepsilon)e^{2(d-2\varepsilon)(\xi-b)}\int_{-b}^{b}\|u(y)\|_H{}^2dy.$$

x 座標にもどし，2ε を改めて ε と書くことにより

$$\int_{x_0{}^\gamma-b}^{x_0{}^\gamma+b}\|u(x)\|_H{}^2dx \leqq C_1(b,\varepsilon)e^{-2(d-\varepsilon)\xi}\int_{x_0{}^\gamma-\xi}^{x_0{}^\gamma+\xi}\|u(x)\|_H{}^2dx.$$

$\xi=x_0{}^\gamma-\xi_\varepsilon$ とおくと

$$\int_{x_0{}^\gamma-b}^{x_0{}^\gamma+b}\|u(x)\|_H{}^2dx \leqq C_1(b,\varepsilon)\exp\{-2(d-\varepsilon)(x_0{}^\gamma-\xi_\varepsilon)\}\int_{\xi_\varepsilon}^{2x_0{}^\gamma-\xi_\varepsilon}\|u(x)\|_H{}^2dx$$

$$\leqq C_2(b,\varepsilon)\exp\{-2(d-\varepsilon)x_0{}^\gamma\}\int_{\xi_\varepsilon}^{2x_0{}^\gamma}\|u(x)\|_H{}^2dx. \qquad (5.2)$$

ここで定数 $C_2(b,\varepsilon)=C_1(b,\varepsilon)\exp(2d\xi_\varepsilon)$ は γ には依らない．結局(5.2)は任意の $\gamma>1$ に対して成り立つ．$\gamma=\ln(\eta/2)/\ln x_0$ とおくことにより次の主張を得る．

補題 2.2[1]　η を無限大に発散するパラメーターとする．$u(x)\in H$ は，$x<\eta$ において方程式

$$A(\eta)\frac{du}{dx}+B(\eta,x)u=\lambda u, \qquad (\|A(\eta)\| \leqq 1)$$

を満たしているとする．そのとき，任意の $\varepsilon>0$，および〔$0<a<\eta/2-\xi_\varepsilon$ なる〕任意の a に対して，ある $C(a,\varepsilon)$ があって

$$\int_{\eta/2-a}^{\eta/2+a}\|u\|_H{}^2dx \leqq C(a,\varepsilon)e^{-d(1-\varepsilon)\eta}\int_0^\eta\|u\|_H{}^2dx \qquad (5.3)$$

が成り立つ．

$u(x)$ は必ずしも $L^2[H]$ には属していないことを注意しておこう．

---

1)　この補題から方程式(4.1)に対して一意性の成り立つ函数族をみつけることができる．もし $u(x)$ が(4.1)と $\int_0^\xi\|u(x)\|_H{}^2dx \leqq C(\varepsilon)e^{(d-\varepsilon)\xi}$ を満たすならば，$u(x)\in L^2[H]$ であり定理2.2の評価式が成り立つ．

§6　摂動の抽象論からの二つの補題

後で必要となる二つの補題を証明しよう(Гавурин[1]-[2], Соломяк[1]).

補題 2.3　A を Hilbert 空間 H における自己共役作用素とする．μ を実軸上の点とし，d を μ から A のスペクトル集合までの距離とする．このとき，$g\in D(A)$ に対して

$$d\|g\| \leqq \|(A-\mu)g\| \tag{6.1}$$

が成り立つ．

証明　μ が A のスペクトル集合に属していれば $d=0$ で成立する．そうでなければ

$$\|(A-\mu)^{-1}\| \leqq \frac{1}{d}$$

より明らかである(Riesz-Sz. Nagy[1]).

補題 2.4　λ_0 を自己共役作用素の孤立スペクトル点とする．M_{λ_0} を A の λ_0 以外のスペクトル集合とする．$d_{\lambda_0,\mu}$ を μ と M_{λ_0} との距離とする．P_{λ_0} を固有値 λ_0 に対応する固有部分空間への射影作用素とする．このとき $g\in D(A)$ に対して

$$d_{\lambda_0,\mu}\|(I-P_{\lambda_0})g\| \leqq \|(A-\mu)g\|$$

が成り立つ．

証明　P_{λ_0}, $(I-P_{\lambda_0})$ は A と可換であることに注意しよう．固有値 λ_0 に対応する固有部分空間の直交補空間において $(A-\mu)$ を考え，不等式(6.1)を用いると

$$d_{\lambda_0,\mu}\|(I-P_{\lambda_0})g\| \leqq \|(A-\mu)(I-P_{\lambda_0})g\| \leqq \|(A-\mu)g\|$$

を得る．

§7　1階の作用素に対する摂動論

補題 2.5　u を方程式

$$(\hat{L}-\lambda)u = A(\eta)\frac{du}{dx}+B(\eta,x)u+v(\eta,x)u-\lambda u = 0 \tag{7.1}$$

の解で次の条件を満たしているとする：

任意の $\varepsilon>0$ に対して η には依らない定数 $C(\varepsilon)$ があって

$$\int_{-x}^{x} \|u\|_H{}^2 dx \leqq C(\varepsilon)e^{\varepsilon x} \qquad (x>0)$$

が成り立つ.

$v(\eta, x)$ は $|x|<\eta$ において $v(\eta, x)=0$ を満たしているとする. d を作用素 $\hat{L}_0$ の孤立していないスペクトル集合と λ との距離とする. ここで $\hat{L}_0$ は次の作用素である：

$$\hat{L}_0 = A(\eta)\frac{d}{dx} + B(\eta, x).$$

このとき, 次の I, II が成り立つ.

I) $$\int_{\eta/2-a\leqq|x|\leqq\eta/2+a} \|u\|_H{}^2 dx \leqq C(a, \varepsilon)e^{-d(1-\varepsilon)\eta} \qquad (a>0).$$

II) 作用素 $\hat{L}_0$ の固有値 μ で次の条件を満たすものがある：

1) $$|\mu-\lambda| \leqq \frac{C(\varepsilon)e^{-d(1-\varepsilon)\eta}}{\left(\int_{-\eta/2}^{\eta/2} \|u\|_H{}^2 dx\right)^{1/2}}.$$

2) $$\int_{-\eta/2}^{\eta/2} \left\| u - \sum_{i=1}^{p} \left[\int_{-\eta/2}^{\eta/2} (u, \phi_\mu{}^i)_H dx\right] \phi_\mu{}^i \right\|_H^2 dx \leqq \frac{C_\varepsilon}{d_\mu} e^{-d(1-\varepsilon)\eta}$$

d_μ : μ と $\hat{L}_0$ の他のスペクトル集合までの距離.

$\phi_\mu{}^i$: 固有値 μ に対応する正規直交固有函数 $(i=1, 2, \cdots, p)$.

証明　仮定より, $|x|<\eta$ において

$$\hat{L}_0 u = A(\eta)\frac{du}{dx} + B(\eta, x)u = \lambda u$$

である. 評価式(5.3)と補題の条件より, 十分大きい正数 η に対して

$$\int_{\eta/2-a\leqq|x|\leqq\eta/2+a} \|u(x)\|_H{}^2 dx \leqq C(a, \varepsilon)e^{-d(1-\varepsilon)\eta} \int_{-\eta}^{\eta} \|u(x)\|_H{}^2 dx.$$

よって補題の主張 I は $\int_{-\eta}^{\eta} \|u(x)\|_H{}^2 dx \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon\eta}$ より導かれる. 函数 $\varphi(x)$ を次のように選ぼう.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 & & |x| < \eta/2 \\ &= 1 + \frac{1}{a}\left(\frac{\eta}{2} - |x|\right) & & \frac{\eta}{2} \leqq |x| \leqq \frac{\eta}{2} + a \\ &= 0 & & |x| \geqq \frac{\eta}{2} + a \qquad \left(1 < a < \frac{\eta}{2}\right) \end{aligned}$$

$\varphi(x)v(\eta, x)=0$ と $\hat{L}u=\lambda u$ であることより，$\varphi(x)\hat{L}_0=\varphi(x)\hat{L}, \varphi(x)[\hat{L}_0-\lambda]u=0$ を得る．したがって

$$[\hat{L}_0-\lambda]\varphi(x)u = A(\eta)\varphi'(x)u.$$

抽象的摂動論に関する補題2.3から，$\hat{L}_0$ の固有値 μ であって

$$|\mu-\lambda| \leqq \frac{\|A(\eta)\varphi' u\|}{\|\varphi u\|} \leqq \frac{C(a)\left(\int_{\eta/2\leqq|x|\leqq\eta/2+a}\|u(x)\|_H{}^2dx\right)^{1/2}}{\|\varphi u\|} \leqq \frac{C(a, \varepsilon)e^{-d(1-\varepsilon)\eta}}{\left(\int_{-\eta/2}^{\eta/2}\|u(x)\|_H{}^2dx\right)^{1/2}}$$

となるものが存在する．

抽象的摂動論に関する補題2.4より

$$\|\varphi u-\sum_{i=1}^{p}(\varphi u, \psi_\mu{}^i)\| \leqq \frac{C(a, \varepsilon)}{d_\mu}e^{-d(1-\varepsilon)\eta}.$$

これより

$$\int_0^{\eta/2}\|u-\sum_{i=1}^{p}(\varphi(x)u, \psi_\mu{}^i)\psi_\mu{}^i\|_H{}^2dx \leqq \frac{C(a, \varepsilon)}{d_\mu}e^{-d(1-\varepsilon)\eta}.$$

一方，定理2.2より

$$\left|(\varphi(x)u, \psi_\mu{}^i)-\int_0^{\eta/2}(u, \psi_\mu{}^i)_H dx\right| \leqq C(\varepsilon)e^{-d(1-\varepsilon)\eta/2}$$

であるから，補題の主張は導かれる．

さて，自己共役作用素

$$\hat{L}(\varepsilon) = A(\tau)\frac{d}{d\tau}+B(\tau)+\varepsilon v(\tau, \varepsilon)$$

を考察しよう．ここで $v(\tau, \varepsilon)$ は H における有界作用素で τ について連続であると仮定する．μ を作用素

$$\hat{L}(0) = A(\tau)\frac{d}{d\tau}+B(\tau)$$

の孤立固有値とし，d_μ を μ と $\hat{L}(0)$ の他のスペクトル集合との距離とする．$\bar{v}(\tau, \varepsilon)$ を次のように定義する．

$$\bar{v}(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} v(\tau, \varepsilon) & |\tau| < 2\tau_\varepsilon \\ 0 & |\tau| \geqq 2\tau_\varepsilon \end{cases}$$

$\varepsilon, \tau_\varepsilon$ は $\|\varepsilon\bar{v}(\tau, \varepsilon)\| \leqq d_\mu/(\alpha+2)$ $(\alpha>0)$ となるように選ぶ(第1章§2-2° 参照)．$\bar{\bar{v}}$

$=v(\tau,\varepsilon)-\bar{v}(\tau,\varepsilon)$ とおこう．そのとき，作用素 $\hat{L}(\varepsilon)$ は次のように書くことができる：

$$\hat{L}(\varepsilon)=A(\tau)\frac{d}{d\tau}+B(\tau)+\varepsilon v(\tau,\varepsilon)$$

$$=A(\tau)\frac{d}{d\tau}+B(\tau)+\varepsilon\bar{v}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\bar{\bar{v}}(\tau,\varepsilon)$$

$$=\hat{L}^0+\varepsilon\bar{\bar{v}}(\tau,\varepsilon).$$

補題 2.5 において $\eta=2\tau_\varepsilon$, $v(\tau,\eta)=\varepsilon\bar{\bar{v}}(\tau,\varepsilon)$ とすると，摂動論における補題より以下に述べる定理を得る．

そのために ε $(0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0)$ の連続函数を，差が $\sigma(\varepsilon)=C(\varepsilon)\exp\{-d(1-\eta)\tau_\varepsilon\}$ であるものを同一視した商空間 S を考えよう．$L_2[H]$ から S に値をとる函数からなる空間 $L_2[H,S]$ を考えよう．この空間における等号 $a=b$ を $a\underset{S}{=}b$ で書くことにする．

作用素

$$\hat{L}(0)=A(\tau)\frac{d}{d\tau}+B(\tau)$$

は $L_2[H]$ において自己共役であり，$B(\tau)$ は τ と可換としよう．作用素 $\varepsilon v(\tau,\varepsilon)$ も τ と可換であり，かつ任意の τ についてそのノルムは零に収束すると仮定しよう．

定理 2.3　ψ_λ を方程式

$$[\hat{L}(0)+\varepsilon v(\tau,\varepsilon)]\psi_\lambda=\lambda\psi_\lambda$$

の解とする．任意の $\delta>0$ に対して，ε に依らない C_δ があって

$$\int_{-x}^{x}\|\psi_\lambda\|_H{}^2d\tau\leqq C_\delta e^{\delta x}\qquad(x>0)$$

を満たしているとする．λ に近い $\hat{L}(0)$ のスペクトル点は，多重度 m の固有値 μ であるとする．このとき，次の 1)–3) が成り立つ．

1)　作用素

$$[\hat{L}(0)+\varepsilon\bar{v}(\tau,\varepsilon)]\times\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma[\hat{L}(0)-z]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k[\bar{v}(\tau,\varepsilon)(\hat{L}(0)-z)^{-1}]^kdz.$$

(ここで Γ は μ を中心とする半径 $d_\mu/2$ の円) は l $(\leqq m)$ 個の異なる固有値 $\mu_i=\mu_i(\varepsilon)$ $(i=1,2,\cdots,l)$ をもち，それに対応する固有部分空間への射影 $P_i(\varepsilon)$ $(i=1,$

$2, \cdots, l$) の直和の次元は m である．

2)
$$\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \|(1-\sum_{i=1}^{l} P_i(\varepsilon))\psi_\lambda\|_H{}^2 d\tau \underset{\mathrm{S}}{=} 0.$$

3)　ある i $(0 \leqq i \leqq l)$ に対して

$$\min(|\mu_i-\mu_{i+1}|, |\mu_i-\mu_{i-1}|)\sqrt{\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \|(I-P_i)\psi_\lambda\|_H{}^2 d\tau} \underset{\mathrm{S}}{=} 0$$

$$|\lambda-\mu_i(\varepsilon)|\sqrt{\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \|\psi_\lambda\|_H{}^2 d\tau} \underset{\mathrm{S}}{=} 0$$

注意 1　λ に最も近い $\hat{L}(0)$ の固有値が μ_1, μ_2 と二つあるとしよう．すなわち λ は μ_1 と μ_2 の中点であるとする．このとき

$$\int_{-\tau_\varepsilon}^{\tau_\varepsilon} \|\psi_\lambda\|_H{}^2 d\tau \underset{\mathrm{S}}{=} 0$$

である．

注意 2　実数 λ に対して条件(7.1)を満たす解は物理的意味をもつ．より広いクラスの偏微分方程式の連続スペクトルの固有函数(一般化された固有函数)はこの条件を満たすことが知られている．

(3.0)の型をした，定理2.1の条件を満たす2階の微分作用素に対しても前述と同様の定理が成り立つ．ただし $\exp\{-d(1-\delta)\tau_\varepsilon\}$ という項を $\exp\{-(1-\delta)\cdot\omega\tau_\varepsilon\}$，$\omega$ は(3.3)で定義されたもの，と置き換える必要がある．これらの事実は前述の定理の証明と同様にできる．

またさらに式(3.1)における α が ξ に依存する場合についても同様の考察ができる(§2の注意2参照)．たとえば，このことは無限遠で無限大に発散するポテンシャルの項をもつ純点スペクトル型の Schrödinger 方程式に対して生じてくる．後者の場合は Kato[3]によって得られた評価式を使うこともできる．

第3章　作用素方程式の強収束

§1　解の弱収束

われわれは次の問題を考察する.

問題　$\{A_n\}$を Banach 空間 B_1 から B_2 への線型作用素の列で，共通の定義域 $D=D(A_n)$をもつものとする．方程式の列

$$A_n x_n = v_n \tag{1.1}$$

において，A_n は A に，v_n は v にそれぞれ何らかの意味で収束するとしたとき，どのような条件を課するならば x_n は(1.1)の極限の方程式

$$Ax = v \tag{1.2}$$

の解に収束するであろうか.

われわれは，まず解が弱収束するための条件を確立し，しかる後に解が強収束するための条件を考察しよう．弱収束を研究するにあたって，われわれは Hilbert 空間で定義された作用素の場合に話を限定しよう.

定理 3.1(Маслов[1])　$\{A_n\}$は Hilbert 空間 H で定義された線型作用素の列で，共通の稠密な定義域 D をもち，しかも，$\{A_n\}$は A に強収束する．$\{f_n\}$は H の元の列で，f に弱収束する．このとき，もし，方程式

$$A_n{}^* x_n = f_n \tag{1.3}$$

に対して有界な解の列$\{x_n\}$が存在するならば，極限方程式

$$A^* x = f \tag{1.4}$$

の解の列$\{y_n\}$が存在して，$\{x_n - y_n\}$は0に弱収束する.

証明　$\{x_n\}$は有界であるから，弱収束するような適当な部分列$\{x_{n_k}\}$がある．その極限を v とすると，v は極限の方程式(1.4)を満たす．実際，任意の $g \in D$ に対して，

$$(Ag, x_{n_k}) = ([A - A_{n_k}]g, x_{n_k}) + (g, f_{n_k}) \to (g, f)$$

一方

$$(Ag, x_{n_k}) \to (Ag, v)$$

であるから,

$$(Ag, v) = (g, f), \qquad (g \in D). \tag{1.5}$$

D は H で稠密であるから，(1.5) から

$$A^*v = f$$

が導かれる．

$H_1 = N(A^*), H_2 = N(A^*)^\perp$ とし，P_1, P_2 をそれぞれ H_1, H_2 への直交射影作用素とする．そこで，z_n, y_n を次のように定義する．

$$\begin{aligned} z_n &= P_2(v - x_n), \\ y_n &= z_n + x_n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

y_n は方程式(1.4)の解である．実際，

$$\begin{aligned} A^*y_n &= A^*(z_n + x_n) = A^*(P_2 v + P_1 x_n) \\ &= A^*P_2 v = A^*(P_1 + P_2)v = A^*v = f. \end{aligned} \tag{1.7}$$

したがって，$\{z_n\}$ が 0 に弱収束することを示すならば証明は完了する．$\{x_n\}$ が有界であるから，次の評価

$$\|z_n\| \leqq \|x_n\| + \|v\|$$

により $\{z_n\}$ は有界である．更に，$z_n \in H_2$ であるから，

$$(z_n, x) = 0, \qquad (x \in H_1). \tag{1.8}$$

一方，$g \in D$ に対して $Ag \in H_2$ であり，

$$\begin{aligned} (Ag, z_n) &= (Ag, y_n - x_n) \\ &= ([A_n - A]g, x_n) + (Ag, y_n) - (A_n g, x_n) \\ &= ([A_n - A]g, x_n) + (g, f - f_n) \\ &\to 0, \ (n \to \infty). \end{aligned} \tag{1.9}$$

(1.8) と (1.9) から $n \to \infty$ のとき，

$$(z_n, u) \to 0, \qquad (u \in H_1 \oplus R(A)) \tag{1.10}$$

が導かれる．ここで，$R(A)$ は H_2 で稠密であることに注意する．実際，0 でない元 $y_0 \in H_2$ で $R(A)$ に直交するものが存在するならば，任意の $x \in D$ に対して，

$$0 = (y_0, Ax) = (A^*y_0, x)$$

であるから，$A^*y_0 = 0$，つまり $y_0 \in H_1$．これは矛盾である．ゆえに，$H_1 \oplus R(A)$ によって張られる線型部分空間の閉包は H 全体である．したがって，(1.10) および $\{z_n\}$ の有界性により，z_n は 0 に弱収束する．よって証明は終る．

注意　もし$(A^*)^{-1}$が存在するならば(つまり，方程式$A^*x=0$が0以外に解を持たないならば)，定理3.1は次のようにいいかえられる：(1.3)の解の列$\{x_n\}$が有界ならば$\{x_n\}$は(1.4)の解に弱収束する．その上，$(A^*)^{-1}$が存在すると仮定するならば，AはあるBanach空間からBanach空間への線型作用素としてもよい．それというのは，上の証明の中でHがHilbert空間であることを利用したのは，HがH_1とH_2に直交分解されるという点だけだからである．

系1　定理3.1の仮定が満たされているとき，さらに，$(x_n, y_n-x_n)\to 0$がいえるならば，$\|y_n-x_n\|\to 0$が導かれる．実際，

$$\begin{aligned}(y_n-x_n, y_n-x_n) &= (y_n, y_n-x_n)-(x_n, y_n-x_n)\\ &= (y_n, z_n)-(x_n, y_n-x_n)\\ &= (v, z_n)-(x_n, y_n-x_n)\\ &\to 0.\end{aligned}$$

ここで，$y_n-v\in H_1$ゆえ，y_n-vはz_nに直交することを使った．

例　次の方程式を考察しよう．

$$\begin{cases} L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon\Delta\left(1+\sin^2\dfrac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon+k^2(x,y)u_\varepsilon \\ \qquad\;\; = F(x,y) \\ u_\varepsilon|_\Gamma = 0,\;\; u_\varepsilon\in L_2[\Omega] \end{cases} \tag{1.11}$$

ここでΔはLaplace作用素，$k^2(x,y)\geqq\alpha>0$，Ωは曲線Γで囲まれた領域である．このとき，(1.11)の解u_εは，$\varepsilon\to 0$のとき$F(x,y)/k^2(x,y)$に$L_2[\Omega]$で弱収束する．

証明　明らかにL_ε^*は掛け算作用素$k^2(x,y)$に強収束するから，定理3.1を応用するには，$\|u_\varepsilon\|$が$\varepsilon\to 0$のとき有界であることを示せばよい．(1.11)に$\left(1+\sin^2\dfrac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon$を掛けて$\Omega$で積分すると，部分積分により

$$\varepsilon\iint_\Omega\left[\nabla\left(1+\sin^2\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon\right]^2dxdy+\iint_\Omega k^2\left(1+\sin^2\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon{}^2dxdy$$

$$=\iint_\Omega Fu_\varepsilon\left(1+\sin^2\frac{x}{\varepsilon}\right)dxdy\leqq\left\|F\left(1+\sin^2\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|\|u_\varepsilon\|$$

$$\leqq C\|F\|\|u_\varepsilon\|.$$

したがって、

$$\iint_\Omega k^2 u_\varepsilon{}^2 dxdy \leqq C\|F\|\|u_\varepsilon\|.$$

ゆえに

$$\|u_\varepsilon\| \leqq \frac{C}{\alpha}\|F\|.$$

これが求めるものであった.

§2　解が強収束するための条件

次に，方程式(1.1)の解が極限方程式(1.2)の解に強収束するための条件を考察してみよう．方程式

$$Ax = f$$

の解を考えるということは，作用素 A の逆を考えることにあたるわけであるから，対応する結果を方程式の言葉でなく，逆作用素の言葉で定式化し，証明するのがより適切であろう．ここでわれわれは，ある Banach 空間を別の Banach 空間へ移す作用素の場合を考察する.

1° 解の強収束に関する定理

$\{A_n\}$ を Banach 空間 B_1 から Banach 空間 B_2 への線型作用素の列で，共通の定義域 D をもつものとする．A を B_1 から B_2 への線型作用素で定義域 D をもち，任意の $g \in D$ に対して

$$Ag = \lim_{n\to\infty} A_n g$$

が成り立つものとする．作用素 A は閉拡張を許すとする．そのとき，A の閉包を $\bar{A}$ と表わす．次の定理が成り立つ.

定理 3.2(Маслов[12])　$\{A_n{}^{-1}\}$が存在して，一様に有界，すなわち

$$\|A_n{}^{-1}\| \leqq C$$

とする．このとき，次の 1), 2) が成り立つ.

1)　A^{-1} が存在して，A^{-1} の定義域の閉包 $\overline{R(A)}$ の上で有界である.

2)　$\overline{A^{-1}} f = \lim_{n\to\infty} A_n{}^{-1} f$,　$f \in \overline{R(A)}$.

証明[1]　1)　A^{-1} が存在することを示すためには，$Ag_0=0$ ならば $g_0=0$ をいえばよい．そこで，$Ag_0=0$ $(g_0\in D(A))$ を仮定して $\|g_0\|$ を評価してみよう．定理の条件から，$\lim_{n\to\infty} A_n g_0 = Ag_0$ ゆえ，任意の ε に対して N_ε が存在して，

$$\|A_n g_0\| \leqq \|Ag_0\| + \varepsilon = \varepsilon, \qquad (n > N_\varepsilon).$$

したがって

$$\|g_0\| = \|A_n^{-1}A_n g_0\| \leqq \|A_n^{-1}\|\|A_n g_0\| \leqq C\varepsilon.$$

ここで ε は任意であったから，$\|g_0\|=0$. すなわち，$g_0=0$.

2)　まず，

$$\lim_{n\to\infty} A_n^{-1}f = A^{-1}f, \qquad (f\in R(A))$$

を示そう．$A^{-1}f\in D(A)=D(A_n)$ $(f\in R(A))$ であるから，$A_nA^{-1}f$ は任意の $f\in R(A)$ に対して定義される．次の点列

$$h_n = A_n(A_n^{-1} - A^{-1})f = f - A_nA^{-1}f$$

は，A_n が A に強収束するから，$n\to\infty$ のとき 0 に収束する．したがって，任意の $f\in R(A)$ に対して，

$$\begin{aligned}\|(A_n^{-1}-A^{-1})f\| &= \|A_n^{-1}h_n\| \leqq \|A_n^{-1}\|\|h_n\| \\ &\leqq C\|h_n\| \to 0.\end{aligned}$$

これで A_n^{-1} が A^{-1} に $R(A)$ の上で収束することが示された．

したがって Banach–Steinhaus の定理によって，A_n^{-1} は $\overline{A^{-1}}$ に $\overline{R(A)}$ の上で収束し，$\|\overline{A^{-1}}\|\leqq C$.

2° 例

例 1　$\Omega\times[0,\infty)$ $(\Omega\subset \boldsymbol{R}^3)$ で設定された次の境界値問題を考えよう．

$$\begin{cases}\hat{L}u = \varepsilon\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + C^2(x)u = F(x,t,\varepsilon) \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \\ u|_\Gamma = 0 \ \text{ または，} \displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^3} |u|^2 dx < \infty.\end{cases} \tag{2.1}$$

ここで，$C^2(x)\geqq\alpha>0$.

---

1)〔訳注〕　第5章§1定理5.1参照.

方程式(2.1)の解の $\varepsilon\to 0$ での行動を考察してみよう．(Klein–Gordon–Фок の方程式の解の，$t\to\infty$ での振舞に関する問題はこの場合に帰着される．そのためには(2.1)に置換 $\tau=t/\varepsilon$, $F(x,t,\varepsilon)=F(x,t/\varepsilon)$ を施せばよい．)

a)　(2.1)の解が $\varepsilon\to 0$ に際して，いかに振舞うかを理解するために，特別な場合，すなわち常微分方程式

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{d^2u}{dt^2}+u = F(t) \\ u|_{t=0} = 0, \qquad u'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

を研究してみよう．

もし $F(t)$ が連続微分可能ならば，$u_\varepsilon(t)$ は次のように表示される．

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \sin\frac{t-\tau}{\varepsilon} F(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t F(\tau)d\left(\cos\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right) \\ &= F(t)-F(0)\cos\frac{t}{\varepsilon}-\int_0^t F'(\tau)\cos\frac{t-\tau}{\varepsilon}d\tau. \end{aligned}$$

したがって，$F(0)=0$ かつ $F'(t)\in L_2$ ならば $\varepsilon\to 0$ のとき $u_\varepsilon(t)$ は $F(t)$ に L_2 で強収束する．しかし $F(0)\neq 0$ ならば弱収束しかしない．

b)　さて，一般の方程式にもどろう．われわれはそれを L_2 の枠で扱う(有界な境界を持つ領域の場合，$u|_\Gamma=0$，全空間の場合 $\|u\|^2=\int|u|^2dx<\infty$)．$\hat{L}u=F(x,t)$ とする．(2.1)に $\partial u/\partial t$ を掛けて，x に関して積分すると

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|cu\|^2 \\ &\quad=\left(F(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

上式を t に関して積分すると，

$$\frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2+\|cu\|^2)=\int_0^t\left(F(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt.$$

ここで，

$$u\Big|_{t=0}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\qquad \|\nabla u\|\Big|_{t=0}=0$$

を使った．さらに t に関して0から1まで積分すると，

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2dt+\frac{1}{2}\left[\int_0^1\|\nabla u\|^2dt+\int_0^1\|cu\|^2dt\right]$$
$$=\int_0^1dt\int_0^t\left(F(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt$$
$$\leqq\left|\int_0^1(1-t)\left(F(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt\right|$$
$$\leqq\sqrt{\int_0^1\|F(x,t)\|^2dt}\sqrt{\int_0^1\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2dt}\tag{2.2}$$

を得る．したがって，

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2dt\leqq\int_0^1\|F(x,t)\|^2dt.$$

これは，$\int_0^1\|F(x,t)\|^2dt$ が存在しさえすれば $\int_0^1\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2dt$ が存在することを意味する．ここで，$\int_0^1\left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|^2dt$ が存在すると仮定しよう．つまり F が，次のノルム

$$\|F(x,t)\|_W=\sqrt{\int_0^1\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|^2+\|F\|^2\right)dt}$$

をもった空間 W に属するとしよう．そのとき，$\int_0^1dt\int_0^t\left(F(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt$ を部分積分して

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2dt+\frac{1}{2}\left(\int_0^1\|\nabla u\|^2dt+\int_0^1\|cu\|^2dt\right)$$
$$=\int_0^1(F(x,t),u)dt-\int_0^1dt\int_0^t\left(\frac{\partial F}{\partial t},u\right)dt$$
$$\leqq\sqrt{\int_0^1\|F(x,t)\|^2dt}\sqrt{\int_0^1\|u\|^2dt}$$
$$+\sqrt{\int_0^1\left\|\frac{\partial F}{\partial t}\right\|^2dt}\sqrt{\int_0^1\|u\|^2dt}$$

を得る．したがって，

$$\int_0^1\|u\|^2dt\leqq\frac{1}{\alpha}\int_0^1\|cu\|^2dt\leqq\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\sqrt{\int_0^1\|u\|^2dt}\,\|F\|_W.$$

ゆえに，L_ε^{-1} は W から $L_2[\Omega\times[0,1]]$ への作用素として $\varepsilon\to0$ のとき，一様に

有界である：

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2[\Omega\times[0,1]]} \leqq \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\|F\|_W. \tag{2.3}$$

極限の作用素は次の形をしている．

$$\hat{L}^0 v = -\Delta v + C^2(x)v = F(x,t).$$

定理3.2によれば，方程式の右辺 $F(x,t)$ が $\overline{R(\hat{L}^0)}$ に属しているならば，u_ε は v に強収束する．$R(\hat{L}^0)$ は t に関して2階微分可能で，条件 $u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ を満たすものからなる．したがって，W の中での $R(\hat{L}^0)$ の閉包は W の元で初期条件：$F(x,0)=0$ を満たすものに等しい．

したがって，方程式(2.1)という一般の場合も，例 a)の場合と同じく，右辺が $t=0$ で0になると仮定するならば，

$$\int_0^1 \|u_\varepsilon - v\|^2 dt \to 0$$

がいえる．このことは，F が ε に依存しても，$\varepsilon\to 0$ のとき W の中で F_0 に収束するとするならば，成り立つ．

さて，$F(x,t)\in W$ ではあるが，$F(x,0)\neq 0$ と仮定しよう．このとき，区間 $[0,1]$ 上の任意の2乗可積分函数 $\varphi(t)\in L_2[0,1]$ に対して

$$\left\|\int_0^1 \varphi(t)(u_\varepsilon - v)dt\right\| \to 0$$

が成り立つ．つまり，混合収束（t に関して弱収束，x に関して強収束）が成り立つ．

証明　方程式(2.1)に $\varphi(t)\in C_0^2[(0,1)]$ を掛けて，t に関して積分すると，

$$\int_0^1 \varphi(t)F(x,t)\,dt = \varepsilon\int_0^1 \varphi(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt + \hat{L}^0\int_0^1 \varphi(t)u\,dt$$

$$= \varepsilon\int_0^1 \varphi''(t)u\,dt + \hat{L}^0\int_0^1 \varphi(t)u\,dt \tag{2.4}$$

を得る．(2.3)より

$$\varepsilon\left\|\int_0^1 \varphi''(t)u\,dt\right\| \leqq \varepsilon\sqrt{\int_0^1 (\varphi''(t))^2 dt}\sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 dt}$$

$$\leqq \frac{2\sqrt{2}\,\varepsilon}{\alpha}\sqrt{\int_0^1 (\varphi''(t))^2 dt}\,\|F\|_W \to 0.$$

一方，作用素$\{L^0\}^{-1}$は存在して有界(前に述べた例を参照)であるから，(2.4)より

$$\int_0^1 \varphi(t)u_\varepsilon dt - \{L^0\}^{-1}\int_0^1 \varphi(t)F(x,t)dt$$
$$= -\varepsilon\{L^0\}^{-1}\int_0^1 \varphi''(t)u_\varepsilon dt$$

を得る．ところが，

$$\{L^0\}^{-1}\int_0^1 \varphi(t)F(x,t)dt = \int_0^1 \varphi(t)\{L^0\}^{-1}F(x,t)dt = \int_0^1 v\varphi(t)dt$$

であるから，$\varepsilon\to 0$のとき

$$\left\|\int_0^1 \varphi(t)[u_\varepsilon - v]dt\right\| \to 0.$$

$C_0^2[(0,1)]$は$L_2[0,1]$の中で稠密であり，$\{\|u_\varepsilon - v\|\}$は$L_2[0,1]$で一様有界であるから Banach–Steinhaus の定理により，任意の$\varphi(t)\in L_2[0,1]$に対して，混合収束が成り立つ．

3° Rellich の定理(新しい証明)

ここでわれわれは，定理3.2の応用として，自己共役作用素のスペクトルに関する Rellich の定理の簡単な証明を与えよう(Rellich[1], Riesz–Sz. Nagy[1], Sz. Nagy[1]参照)．

定理 3.3 (Rellich)　$\{A_n\}$は Hilbert 空間Hで定義された自己共役作用素の列で，自己共役作用素Aに次の意味で強収束すると仮定する：$A=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$. $\{E_\lambda^{(n)}\}$と$\{E_\lambda\}$をそれぞれ，A_nとAに対する単位の分解とする．このときλがAの点スペクトルに属さないならば，$E_\lambda^{(n)}$はE_λに強収束する．

証明　まず，$\|A_n\|\leqq 1$の場合について証明を行なう．任意の多項式$P(t)$に対して，

$$P(A_n)\to P(A)$$

が成り立つから Weierstraß の定理によって，任意の$f\in C[-1,1]$に対して，

$$f(A_n)\to f(A).$$

したがって，特にfとして

$$f(t)=\begin{cases} t & (t\leqq 0) \\ 0 & (t>0) \end{cases}$$

をとれば

$$E_0^{(n)}A_n \to E_0A$$

を得る．したがって

$$E_0^{(n)}A \to E_0A. \tag{2.5}$$

実際，任意の $f\in H$ に対して，

$$\begin{aligned}\|E_0^{(n)}Af-E_0Af\| &\leqq \|E_0^{(n)}(A-A_n)f\|+\|E_0^{(n)}A_nf-E_0Af\|\\ &\leqq \|(A-A_n)f\|+\|E_0^{(n)}A_nf-E_0Af\|\\ &\to 0.\end{aligned}$$

もし 0 が A の固有値でないならば，$R(A)$ は H で稠密であり，しかも A^{-1} が存在する．したがって，任意の $f\in R(A)$ に対して，

$$E_0^{(n)}f = E_0^{(n)}AA^{-1}f \to E_0f$$

が成り立ち，$R(A)$ が稠密だから

$$E_0^{(n)}f \to E_0f, \quad (f\in H)$$

が成り立つ．$\lambda\neq 0$ のときは，$A-\lambda$ を考えればよい．これで，$\|A_n\|\leqq 1$ の場合が証明された．次に一般の場合を考察しよう．条件

$$A_nf \to Af, \quad (f\in D)$$

から，

$$(A_n\pm i)f \to (A\pm i)f, \quad (f\in D)$$

が導かれる．一方，

$$\|(A_n\pm i)^{-1}\| \leqq 1$$

であるから，定理 3.2 により，

$$(A_n\pm i)^{-1} \to (A\pm i)^{-1}$$

を得る．したがって，

$$\frac{1}{A_n+i}+\frac{1}{A_n-i}=\frac{2A_n}{A_n^2+1}\to\frac{2A}{A^2+1}$$

が成り立つ．ところが，A_n と A に対する射影作用素 $E_0^{(n)}$ と E_0 は，$\dfrac{A_n}{A_n^2+1}$

と$\dfrac{A}{A^2+1}$に対応する射影作用素に一致するから，結局一般の場合は先に述べた特別の場合に帰着された．

4° 孤立スペクトルから連続スペクトルへの移行[1)]

この小節では，われわれはL_2で定義され，共通の稠密な定義域Dをもつ自己共役作用素の列A_nで自己共役作用素Aに強収束するものを扱う（すなわち，$\overline{\lim_{n\to\infty} A_n}=A$）．ここで$A_n$は孤立スペクトルを持ち，$A$は，連続スペクトルを持つものとする．以下，$g^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,\cdots)$はAの生成基底，E_λと$E_\lambda^{(n)}$はそれぞれA, A_nに対応する単位の分解，fはSchwartzの基礎函数，f^αは$E_\lambda g^{(\alpha)}$で張られた部分空間へのfの射影を表わすものとする．

作用素AはГельфанд–Костюченкоの定理の条件を満たすとする．したがって，

$$\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \tag{2.6}$$

なる形の汎函数として定義された一般固有函数をもつ（Гельфанд–Шилов[2]）．

定理 3.4（Маслов[13]）　汎函数(2.6)がλに関して連続と仮定する．そのときA_nの固有値の列$\{\lambda_i^n\}$と対応する固有函数の列が存在して，$\{\lambda_i^n\}$は，与えられたλに収束し，対応する固有函数の列は，基礎函数の上の汎函数として，一般固有函数に収束する．

定理の証明は二つの補題の証明からなる．まず，定義を二つ述べよう．

定義 1　f_nがfに測度の列μ_nに沿って平均収束するとは，$\int |f_n-f|^2 d\mu_n \to 0$が成り立つことである．

定義 2　f_nがfに測度の列μ_nに沿って測度収束するとは，任意のε, δに対して，$N_{\varepsilon,\delta}$が存在して

$$\mu_n\{|f_n-f|>\delta\}<\varepsilon, \qquad (n>N_{\varepsilon,\delta})$$

が成り立つことである．

補題 3.1 a　f_nがfに測度μ_nに沿って平均収束すれば，測度収束する．

1)　この小節は作用素のスペクトル論としては特殊な話題であるから，初めて読まれる際には省略してもよい．ここに述べられた例を読めば十分である．

証明 帰謬法による．ある $\delta>0$ と $\varepsilon>0$ があって，適当な部分列 f_{n_k} に対して，

$$\mu_{n_k}\{|f-f_{n_k}|>\delta\}\geqq\varepsilon$$

が成り立つとする．すると，次の不等式

$$\int|f-f_{n_k}|^2d\mu_{n_k}\geqq\int_{|f-f_{n_k}|>\delta}|f-f_{n_k}|^2d\mu_{n_k}$$
$$\geqq\delta^2\varepsilon$$

が成り立つ．これは矛盾である．これで補題の証明ができた．

$\boldsymbol{R}^1$ 上の測度 μ_n が任意の区間 Δ の上で Lebesgue 測度 μ に収束し，f_n が連続函数 f に μ_n に沿って平均収束していると仮定する．このとき，補題より，任意の点 x_0 に対して単調函数 $\mu_n(-\infty,x)$ の跳躍点の列 $\{x_n\}$ が存在して，$x_n\to x_0$, $f_n(x_n)\to f(x_0)$ を満たす．実際，δ,Δ および自然数 p が与えられたとせよ．そのとき，補題より次のような $N_{\Delta\delta p}$ を選ぶことができる：任意の $n>N_{\Delta\delta p}$ に対して，区間 $(x_0-\Delta,x_0+\Delta)$ に含まれる $\mu_n(-\infty,x)$ の跳躍点で，

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|<\delta \tag{2.7}$$

なる条件を満たすものは，p 個以上存在する．

今，任意の $x,y\in(x_0-\Delta,x_0+\Delta)$ に対して $|f(x)-f(y)|<\delta$ となるように Δ を十分小さくとるならば，(2.7) より，

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|<2\delta$$

が成り立つ．

補題 3.1 Гельфанд–Костюченко の意味で定義された A の一般固有函数

$$\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})} \tag{1}$$

が λ に関して連続であるとする．そのとき，A_n の一般固有函数はスペクトル測度の列に沿って，A の一般固有函数に平均収束する．

証明 次の等式を考察してみよう．

$$\int\left|\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})}-\frac{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})}\right|^2d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})$$
$$=\int\left|\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})}\right|^2d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})$$

$$-2\mathrm{Re}\int\overline{\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})}}d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})$$

$$+\int\left|\frac{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})}\right|^2 d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},g^{(\alpha)}). \tag{2.8}$$

$\dfrac{d(E_\lambda g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})}$ が λ に関して連続であり，Rellich の定理により，$E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)}\to E_\lambda g^{(\alpha)}$ であるから，(2.8)の右辺の最初の2項は，それぞれ $(f^{(\alpha)},f^{(\alpha)})$ と $2(f^{(\alpha)},f^{(\alpha)})$ に収束する[1]．したがって最後の項が $(f^{(\alpha)},f^{(\alpha)})$ に収束することを示せば証明は終る．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$f^{(\alpha)}$ と $g^{(\alpha)}$ の定義により，次のような区間 $\varDelta_i$ $(i=1,\cdots,N)$ が存在する．

$$\|f^{(\alpha)}-\sum_{i=1}^{N}C_iE_{\varDelta_i}g^{(\alpha)}\|\leqq\frac{\varepsilon}{2}.$$

したがって，$n>n_0$ ならば，

$$\max_{i=1,\cdots,N}\|C_iE_{\varDelta_i}{}^{(n)}g^{(\alpha)}-C_iE_{\varDelta_i}g^{(\alpha)}\|\leqq\frac{\varepsilon}{2N}$$

とできるから，$n>n_0$ ならば，

$$\|f^{(\alpha)}-\sum_{i=1}^{N}C_iE_{\varDelta_i}{}^{(n)}g^{(\alpha)}\|\leqq\varepsilon.$$

(2.8)の最後の項は，$\{E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},\lambda\in\boldsymbol{R}\}$ で張られる部分空間への $f^{(\alpha)}$ の射影の2乗であるから，

$$\left|(f^{(\alpha)},f^{(\alpha)})-\int\left|\frac{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})}\right|^2 d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})\right|$$

$$=\left|\left(f^{(\alpha)},f^{(\alpha)}-\int\frac{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})}d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)})\right)\right|$$

$$\leqq\|f^{(\alpha)}\|\left\|f^{(\alpha)}-\int\frac{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)},g^{(\alpha)})}d(E_\lambda{}^{(n)}g^{(\alpha)})\right\|$$

$$\leqq^{2)}\|f^{(\alpha)}\|(\|f^{(\alpha)}-\sum_{i=1}^{N}C_iE_{\varDelta i}{}^{(n)}g^{(\alpha)}\|+\varepsilon)$$

$$\leqq 2\varepsilon\|f^{\alpha}\|.$$

以上で証明は終った．

ゆえに補題より，作用素 A_n のスペクトルが離散的であり定理3.4の条件が満たされるならば，作用素 A の任意の一般固有函数と固有値 λ に対して A_n の

---

1)〔訳注〕 (2.8)式の積分区間を有界とすればよい．

2)〔訳注〕 原著では ε が落ちている．

固有値 λ_n と対応する固有函数の列が存在して，λ_n は λ に収束し，固有函数は $f^{(\alpha)}$ の上の汎函数として A の固有函数に収束することがわかる．

例 (Маслов[8])　ポテンシャル・エネルギー $u(x)$ をもった 1 次元の Schrödinger 方程式を考えよう．

$$\frac{h^2}{2m}y_n''+(\lambda-u(x))y_n=0. \tag{2.9}$$

この方程式の固有函数は与えられたエネルギー水準に対応する系の固有状態を特徴づけている．

われわれは $u(x)$ が一般的な型のポテンシャルの穴を表現している場合を扱う．すなわち，$u(x)$ は連続函数で有限個の最大値と最小値をもち，$u(-\infty)=u(\infty)=\infty$ であるとする．

そのとき，$u(x)$ の極値に対応する有限個の数を除いて，方程式：$\lambda-u(x)=0$ は偶数個の単根をもつ．方程式(2.9)に対応する作用素のスペクトルは，$h\neq 0$ のときは，点スペクトルのみからなるが，$h=0$ の場合は連続スペクトルのみからなる．後者の場合，λ に対応する固有函数は，$\lambda-u(x)$ が 0 になる点に集中した δ 函数の線型結合であり，$u(x)-\lambda=0$ の根の数は λ におけるスペクトルの多重度に等しい．

$\lambda_n{}^i$ を方程式(2.9)の固有値で，函数 $u(x)-\lambda_n{}^i$ が $2k$ 個の零点 $x_1,\cdots,x_{2k}$ を持つものとし，対応する固有函数 y_n は長さ 1 に正規化されているとするならば，$\lambda_n{}^i$ は次の方程式

$$\sqrt{\frac{2m}{h^2}}\int_{x_{2j-1}}^{x_{2j}}\sqrt{\lambda_n{}^i-u(x)}\,dx$$
$$=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)+O(h),\ (j=1,\cdots,k) \tag{2.10}$$

の一つを満たす．その際，i 番目の方程式を満たし他の方程式を $O(h)$ を法として満たさない $\lambda_n{}^i$ に対応する固有函数は，$x_{2i-1}-\alpha\leqq x\leqq x_{2i}+\alpha$ の外で $h\to 0$ のとき指数函数的に減衰する．ここで α は h に依らない正の数であり，いくら小さくともよい．そのような固有値の列を $\{\lambda_n{}^i\}$，対応する固有函数を $\{y_{in}\}$ とする．さて，$\{\lambda_n{}^i\}$ の部分列で λ に収束するものを $\{\lambda_{n_\nu}{}^i\}$，対応する固有函数を $\{y_{in_\nu}\}$ と表わす．$\lambda-u(x)$ の零点で i 番目の極値を与える点を夾むものを x_{2i-1}'，x_{2i}' とする．方程式(2.9)の固有函数が長さ $1/\sqrt{h}$ に正規化されているとする：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y_n|^2dx=\frac{1}{h}.$$

そのとき，偶数番目の n_ν に対応する固有函数は，

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \lambda_{n_\nu}{}^i\to\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}y_{in_\nu}\varphi(x)dx=\frac{\varphi(x_{2i-1}')}{\sqrt{u'(x_{2i-1}')}}-\frac{\varphi(x_{2i}')}{\sqrt{u'(x_{2i}')}}$$

を満たし，奇数番目の n_ν に対応する固有函数は，

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \lambda_{n_\nu}{}^i\to\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}y_{in_\nu}\varphi(x)dx=\frac{\varphi(x_{2i-1}')}{\sqrt{u'(x_{2i-1}')}}+\frac{\varphi(x_{2i}')}{\sqrt{u'(x_{2i}')}}$$

を満たす．ここで φ は任意の1回連続微分可能な2乗可積分函数である．

したがってわれわれは，方程式(2.9)の固有値と固有函数の $h\to 0$ での振舞に関して以下に述べるような描像を得る．任意の固有函数はある一つの穴の外では，0に収束するから，すべての固有函数とそれに対応する固有値は，ポテンシャル・エネルギー $u(x)$ の極小値(穴)に則して分類することができるが，穴の内側では固有函数をさらに2種類に分けることができる：一つの類は奇数番目の n に対応し，折返し点に結びついた δ 函数の和に収束し，他の類は偶数番目の n に対応し，δ 函数の差に収束する．このような固有函数の分類は，作用素(2.9)の単純スペクトルがどのようにして極限において掛け算作用素 $u(x)$ の重複スペクトルに移行するのかを説明している．

この例で述べられた命題は第2部で与えられる Schrödinger 方程式の固有函数の漸近式を見れば容易に調べることができる．この例は，先に述べた定理の結論がある意味で改良できないことを示している．すなわち，一般には適当に正規化された任意の固有函数の列が，極限方程式の一般固有函数に一般化された意味で収束すると期待することはできず，ただ，適当な部分列が極限方程式の与えられた固有函数に収束するといえるだけである．

5° ある種の適切でない問題に対する Тихонов の正則化

1．非常に多くの作用素方程式

$$Tz=u$$

は次の意味で適切でない．すなわち，T を連続群 $\mathscr{H}_1$ から $\mathscr{H}_2$ への作用素としたとき，$\mathscr{H}_2$ の中で $u_n\to u$ であっても方程式 $Tz_n=u_n$ の解 z_n は $\mathscr{H}_1$ の中で z に収束しないことがある．

A. H. Тихонов によって導入された適切性の概念は，M. M. Лаврентьев による Тихонов の意味で適切な問題に対する解法の研究を可能ならしめたが (Лаврентьев[1]参照)，Тихонов はさらに，適切でない問題に対して正則化可能性という概念を導入し，多くの問題に対して(その中には非線型の積分方程式も含まれているが)その正則化可能性を示した．さらに，彼の正則化の方法のあるものは，具体的問題を計算機で解くのに非常に有効であることが明らかになった．

適切でない問題の正則化とは，非有界な逆作用素 $R=T^{-1}$ の代わりに有界な作用素の列を用いることである．われわれは，例として次の命題の証明を挙げよう．この命題は，Тихонов[1]-[2]による第0次の正則化に対応するものである．

定理 3.5 R を Hilbert 空間 H で定義された稠密な定義域 $D(R)$ をもつ閉作用とする．このとき，問題：$Ru=z\,(z\in H)$ は Тихонов の意味で正則化可能であり，作用素

$$R_\delta=\overline{[1+\delta RR^*]^{-1}R},\qquad (\text{ー は閉包}),$$

が，正則化された作用素である．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta(\varepsilon,z)$ が存在して，$\|u-\tilde{u}\|<\delta<\delta(\varepsilon,z)$ ならば，$\|R_\delta\tilde{u}-z\|<\varepsilon$ が成り立つ．

証明 仮定より以下のことが導かれる．

i) R^* が存在して，定義域は稠密．

ii) R^{**} が存在して，$R=R^{**}$.

iii) $B_\delta=[1+\delta RR^*]^{-1}$, $C_\delta=\sqrt{\delta}\,R^*[1+\delta RR^*]^{-1}$ はいたるところで定義されて，そのノルムは1以下．

iv) RR^* は非負自己共役作用素．

v) $R_\delta=\delta^{-1/2}C_\delta^*, \|R_\delta\|=\delta^{-1/2}\|C_\delta^*\|=\delta^{-1/2}\|C_\delta\|\leqq\delta^{-1/2}$.

さて，$\|u-\tilde{u}\|<\delta$ ならば，$R_\delta\tilde{u}-z$ は $\delta\to 0$ のとき 0 に収束することを示そう．作用素 $1+\delta RR^*$ は H で稠密な集合 $D(RR^*)$ の上で 1 に収束するから，定理 3.2 によって，B_δ は H の上で 1 に強収束することに注意すれば，

$$\begin{aligned} R_\delta\tilde{u}-z &= R_\delta\tilde{u}-Ru = R_\delta\tilde{u}-R_\delta u+(R_\delta-R)u \\ &= R_\delta(\tilde{u}-u)+(B_\delta-1)z \end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned}\|R_\delta\tilde{u}-z\| &\leqq \|R_\delta\|\|\tilde{u}-u\|+\|(B_\delta-1)z\| \\ &\leqq \sqrt{\delta}+\|(B_\delta-1)z\|\to 0.\end{aligned} \tag{2.11}$$

よって証明された．

2. 系　$z\in D(R^*)$（すなわち，$u\in D(R^*R)$）とせよ．そのとき，

$$\|R_\delta\tilde{u}-z\|\leqq(1+\|R^*z\|)\sqrt{\delta}$$

が成り立つ．

実際，

$$\begin{aligned}\|[B_\delta-1]z\| &= \|\{[1+\delta RR^*]^{-1}-1\}z\| \\ &= \delta\|\overline{[1+\delta RR^*]^{-1}RR^*}z\| = \delta\|R_\delta R^*z\| \\ &\leqq \sqrt{\delta}\|R^*z\|.\end{aligned}$$

したがって，(2.11) より系が得られる．

$R=T^{-1}$ とすると，R_δ は次のように書ける．

$$\begin{aligned}R_\delta &= \overline{[1+\delta T^{-1}[T^{-1}]^*]^{-1}T^{-1}} \\ &= \overline{[(T^*T)^{-1}(T^*T+\delta)]^{-1}T^{-1}} \\ &= \overline{(T^*T+\delta)^{-1}T^*};\end{aligned}$$

$$R_\delta\tilde{u} = z_\delta.$$

したがって $\tilde{u}\in D(T^*)$ とすれば[1]，z_δ は方程式

$$(\delta+T^*T)z_\delta = T^*\tilde{u}$$

によって定義される．

注意　もし，作用素 R が

$$\|(1-\delta R)^{-1}\|\leqq a$$

なる評価を満たすならば，R の正則化として，

$$R_\delta = R\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{|\delta|}}R\right)^{-1}$$

をとることができる．ただし，δ は複素平面上 0 に近づく曲線の上を動くものとする．このときも前定理とまったく同様の結果を得ることができる．たとえば，$z\in D(R)$（すなわち，$u\in D(\boldsymbol{R}^2)$）とすると，

$$\begin{aligned}\|z-R_\delta\tilde{u}\| &\leqq \|R_\delta(\tilde{u}-u)\|+\|R_\delta u-Ru\| \\ &\leqq (a+1)(1+\|R^2u\|)\sqrt{|\delta|}.\end{aligned}$$

1)　もし $\tilde{u}\notin D(T^*)$ ならば，$\|\tilde{u}-\tilde{\tilde{u}}\|=\delta^2$ なる $\tilde{\tilde{u}}\in D(T^*)$ をとればよい．

$R=T^{-1}$ とするならば，

$$R_\delta = T^{-1}\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{|\delta|}}T^{-1}\right)^{-1} = \left(T-\frac{\delta}{\sqrt{|\delta|}}\right)^{-1}.$$

したがって，z_δ は次の方程式

$$\left(T-\frac{\delta}{\sqrt{|\delta|}}\right)z_\delta = \tilde{u}$$

の解として得られる．この正則化の方法は，Тихонов の‘特殊な’正則化の特別な場合(第0次の正則化)にあたる．

§3　逆作用素に対する摂動論的級数

この節では，逆作用素の摂動論的級数展開に関する次の定理を述べる．

定理 3.6　Banach 空間 X で定義された線型作用素 A, B を考える．A, B は，次の条件を満たすものとする．

1)　$A+\varepsilon B$ の閉包が存在する．

2)　$D(A+\varepsilon B)$ は X で稠密である．

3)　$A = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}(A+\varepsilon B)}$.

4)　$[\overline{A+\varepsilon B}]^{-1}$ は $\varepsilon\to 0$ のとき存在して一様有界.

5)　$A^{-1}(BA^{-1})^k f$ $(k=1,2,\cdots,n)$ が存在する．　(3.1)

このとき次の式が成り立つ．

$$\|[\overline{A+\varepsilon B}]^{-1}f - A^{-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varepsilon^k(BA^{-1})^k f\| = o(\varepsilon^n).$$

証明　まず次のことに注意しよう：(3.1)のような n 個の元が存在するならば，前の方の $n-1$ 個の元は，$D(A)$ と $D(B)$ に属し，したがって，$D(A+\varepsilon B) \subset D(\overline{A+\varepsilon B})$ に含まれる．

次の等式を示そう．

$$(\overline{A+\varepsilon B})^{-1}f = A^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-\varepsilon)^k(BA^{-1})^k f + (\overline{A+\varepsilon B})^{-1}(-\varepsilon)^n(BA^{-1})^n f$$

実際，

$$f = \sum_{k=0}^{n-1}(-\varepsilon)^k(BA^{-1})^k f + \varepsilon(BA^{-1})\sum_{k=0}^{n-1}(-\varepsilon)^k(BA^{-1})^k f$$

$$
\begin{aligned}
&+(-\varepsilon)^n(BA^{-1})^n f \\
&=(\overline{A+\varepsilon B})\left\{A^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-\varepsilon)^k(BA^{-1})^k f\right. \\
&\quad\left.+(\overline{A+\varepsilon B})^{-1}(-\varepsilon)^n(BA^{-1})^n f\right\}.
\end{aligned}
$$

ここで両辺に $(\overline{A+\varepsilon B})^{-1}$ を施せばよい.

したがって，次の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\|(A+\varepsilon B)^{-1}f-A^{-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varepsilon^k(BA^{-1})^k f\| \\
&=\varepsilon^n\|\{A+\varepsilon B)^{-1}-A^{-1}\}(BA^{-1})^n f\|.
\end{aligned}
$$

仮定より $(BA^{-1})^n f\in R(A)$ であるから，定理3.2により，

$$
\|\{(\overline{A+\varepsilon B})^{-1}-A^{-1}\}(BA^{-1})^n f\|\to 0, \qquad (\varepsilon\to 0).
$$

よって証明できた.

第4章　作用素半群の摂動論と発展方程式

§1　序

この章では Banach 空間 B で定義された1パラメーター作用素半群 T_t ($0\leqq t<\infty$) で次の条件を満たすものを考察しよう：

1)　有界性

$$\|T_t\| \leqq K_s \qquad (0 \leqq t \leqq s)$$

2)　強連続性　すべての $t\geqq 0, x\in B$ に対して，$\varepsilon\to 0$ のとき

$$\|T_{t+\varepsilon}x - T_t x\| \to 0.$$

これらの条件のもとで

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon - I)x$$

が強収束するような x は稠密で，その極限を Ax とおくと A は閉作用素となる．A を作用素半群 T_t の生成作用素という (Riesz–Sz. Nagy[1])．

生成作用素の収束とそれに対応する半群の収束との関係にわれわれは興味をもつ．この問題をはっきりさせるために半群とその生成作用素との対応を明らかにする必要がある．もし作用素 A が有界ならば

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!} = e^{At} \tag{1.1}$$

はすべての t について収束し対応は容易にわかる．もし作用素 A が非有界ならば，級数(1.1)は意味がない．それにもかかわらず，有界で強連続な半群 T_t は A と1対1に対応している．T_t を A で表わすいくつかの公式がある．たとえば

$$T_t = \lim_{k\to\infty}\left(I - \frac{t}{k}A\right)^{-k}$$

あるいは $T_t=\lim_{n\to\infty} e^{A_n t}$, A_n は有界, $A_m A_n = A_n A_m$ かつ $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax (x\in D(A))$, 等である．このような公式は Hille–Phillips[1], Dunford–Schwartz[1] で述べてある．これらの公式の一般化は§4–2° で与えられる．

Banach 空間における作用素の半群は作用素係数の微分方程式と密接な関係

がある．もし A が有界強連続半群 T_t の生成作用素であるならば，$f_0\in D(A)$ に対して $f(t)=T_tf_0$ は，微分方程式

$$\frac{df}{dt}=Af$$

を満たす．

われわれはより一般の

$$\frac{du(t)}{dt}-A(t)u(t)=F(t)\qquad(0\leqq t\leqq a)\tag{1.2}$$

の型の方程式を考えよう．$u(t)$ は複素 Banach 空間 B の値をとり，$F(t)$ は与えられた函数である．$A(t)$ は t に依存し，多くの場合非有界作用素である．

もし $A(t)$ が t に依らず $F\equiv 0$ であれば，方程式(1.2)の解は形式的には $e^{At}u(0), u(0)\in B,$ と書き表わされる．厳密な定義と作用素の指数函数の性質は半群の理論において与えられる．半群の理論において作用素 A が生成作用素になるための必要十分条件が与えられている．それは A が稠密な定義域をもつ閉作用素であり，A のレゾルベントに対して

$$\|(A-\lambda)^{-n}\|\leqq\frac{M}{(\lambda-\omega)^n}\qquad(\lambda>\omega)\tag{1.3}$$

が成り立つことである(Dunford–Schwartz[1], Hille–Phillips–Yosida の定理)．

われわれはこの条件を A が t に依存する場合，十分条件として拡張しよう．後で必要になるのは，$T_t=e^{At}$ のノルムが1以下の場合である．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して $\|(1-\varepsilon A)^{-1}\|\leqq 1$ となり，(1.3)において $M=1, \omega=0$ に対応する．

§2　発展方程式の解の評価

次の定義を導入しよう．B における作用素 $A(t)$ がもし次の条件を満たすならば，性質 P をもつといおう．

1)　$A(t)$ は稠密な定義域をもつ閉作用素である．

2)　ある ω があって $\lambda>\omega$ ならば λ は $A(t)$ のレゾルベント集合に属している．

3)　$(A(t)-\lambda)^{-1}h$ $(\lambda>\omega, h\in B)$ は Bochner 可積分である．

4)　正数 M が存在して，任意の分割 $s\geqq t_1\geqq t_2\geqq\cdots\geqq t_n\geqq 0$ に対して

$$\|(A(t_1)-\lambda)^{-1}(A(t_2)-\lambda)^{-1}\cdots(A(t_n)-\lambda)^{-1}\| \leqq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$$

が成り立つ．

補題 4.1　$A(t)$ は性質 P をもつとする．$u(t)$ は t の連続函数で，その値は $D(A(t))$ に含まれ $du/dt, F(t)=du/dt-A(t)u(t)$ は Bochner の意味で可積分であるとする．このとき，不等式

$$\max_{0\leqq t\leqq s}\|u(t)\|_B \leqq M\exp(\omega_1 s)\left\{\|u(0)\|_B+\int_0^s\|F(t)\|_B dt\right\},\quad (\omega_1>\omega) \tag{2.1}$$

が成り立つ．

系 1　補題の仮定のもとに方程式(1.2)の解は初期条件 $u(0)$ と $F(t)$ により一意的に定まる．

$M=1$ のときは，Kato[1]により得られており，以下に述べる方法は Yosida および Elliot[1]の方法の拡張ともいうべきものである(Riesz-Sz. Nagy[1])．また一意性については Вишик[1], Ладыженская[1]の研究がある．

証明　まず次の記号を導入しよう．Banach 空間 B の値をとる連続函数 $u(t)$ $(0\leqq t\leqq s)$ のなすベクトル空間を $C[B]$ で表わし，$\|u(t)\|_{C[B]}=\sup_{0\leqq t\leqq s}\|u(t)\|_B$ でもってノルムとする．$L_1[B]$ は Bochner の意味で可積分な函数の全体で，そのノルムは

$$\|f(t)\|_{L_1[B]}=\int_0^s\|f(t)\|_B dt$$

である．B と $L_1[B]$ の直積 Banach 空間を $B\oplus L_1[B]$ で表わす．ノルムは $\{g, f(t)\}\in B\oplus L_1$ に対して

$$\|\{g,f(t)\}\|_{B\oplus L_1[B]}=\|g\|_B+\|f(t)\|_{L_1[B]}$$

である．

L でもって次の $C[B]$ から $B\oplus L_1[B]$ への作用素を表わそう．

$$Lu=\left\{u(0),\ \frac{du}{dt}-A(t)u\right\}.$$

$D(L)$ は $C[B]$ から $L_1[B]$ への作用素 $d/dt, A(t)$ の共通定義域とする．次の作用素を導入しよう：

$$I_\delta(t)=(I-\delta A(t))^{-1},\qquad B_\delta(t)=A(t)I_\delta(t).$$

作用素 $I_\delta(t)$ は有界である．なぜなら

$$I_\delta(t) = [I/\delta - A(t)]^{-1}\frac{1}{\delta}$$

および

$$\|(\lambda - A(t))^{-1}\| \leqq \frac{M}{\lambda - \omega}$$

より $\|I_\delta\| \leqq M/(1-\delta\omega)$ を得るからである．特に $\delta \leqq 1/2\omega$　とすると，

$$\|I_\delta(t)\| \leqq 2M.$$

作用素 $B_\delta(t)$ もまた有界である．それは

$$B_\delta(t) = A(t)I_\delta(t) = A(t)\frac{I}{I-\delta A(t)} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{I}{I-\delta A(t)} - I\right) = \frac{I_\delta(t)}{\delta} - \frac{I}{\delta}$$

より，$\delta \leqq 1/2\omega$ ならば

$$\|B_\delta(t)\| \leqq (2M+1)/\delta$$

を得るからである．定理3.2より $\delta \to 0$ のとき $\overline{D(A(t))}$ で $I_\delta(t) \to I$, また $D(A(t))$ 上で $B_\delta(t) \to A(t)$. さて $C[B]$ から $B \oplus L_1$ への作用素 $L_\delta(t)$ を定義しよう．

$u(t) \in D\left(\dfrac{d}{dt}\right) \subset C[B]$ に対して

$$L_\delta(t)u(t) = \left\{u(0),\ \frac{du(t)}{dt} - B_\delta(t)u(t)\right\}$$

とする．$B \oplus L_1$ のノルムの意味で $D(L)$ において $L_\delta \to L\ (\delta \to 0)$ を示そう．定義より

$$\begin{aligned} L_\delta(t)u(t) &= \left\{u(0),\ \frac{du(t)}{dt} - B_\delta(t)u(t)\right\} \\ L(t)u(t) &= \left\{u(0),\ \frac{du(t)}{dt} - A(t)u(t)\right\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

第1式より第2式を引くと

$$\|L_\delta u - Lu\|_{B\oplus L_1[B]} = \|\{0,\ B_\delta u - Au\}\|_{B\oplus L_1[B]} = \int_0^s \|B_\delta u(t) - A(t)u(t)\|_B dt.$$

$\delta \to 0$ ならば，この積分は零に収束することを示そう．被積分函数は $\delta \to 0$ とともに零に近づく．したがって被積分函数を可積分函数で評価できることを示せばよい．

$A(t) - B_\delta(t) = [I - I_\delta(t)]A(t)$ であり，また $\|I_\delta(t)\| \leqq 2M$, したがって $\|I - I_\delta(t)\|$

$\leqq 2M+1$ であることから

$$\|[I-I_\delta(t)]A(t)u(t)\|_B \leqq (2M+1)\|A(t)u(t)\|_B.$$

仮定より $\|A(t)u(t)\|_B$ は可積分であるから Osgood (Lebesgue) の定理より

$$\int_0^s \|(A(t)-B_\delta(t))u(t)\|_B dt \to 0.$$

よって，$D(L)$ において $B\oplus L_1$ への作用素として $L_\delta \to L\ (\delta\to 0)$ を得る．

作用素 L_δ^{-1} の有界性を示そう．すなわち，もし $L_\delta u_\delta = \{u(0), F(t)\}$ ならば

$$\max_{0\leqq t\leqq s} \|u_\delta(t)\|_B \leqq C\left\{\|u(0)\|_B + \int_0^s \|F(t)\|_B dt\right\} \tag{2.3}$$

が成り立つ．式(2.3)は $\|L_\delta^{-1}\|\leqq C$ であることを意味している．(2.3)を証明するために，問題

$$\begin{cases} \dfrac{du_\delta(t)}{dt} - B_\delta(t)u_\delta(t) = F(t) \\ u_\delta(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

を考えよう．変換 $u_\delta(t) = \exp(-t/\delta)v(t)$ を行なうと，(2.4)は

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} - \dfrac{1}{\delta}v - B_\delta(t)v = F(t)e^{t/\delta} \\ v|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

に変形される．$B_\delta(t) + \dfrac{1}{\delta} = \dfrac{1}{\delta}I_\delta(t)$ であるから，

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} - \dfrac{1}{\delta}I_\delta(t)v = F(t)e^{t/\delta} \\ v|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

となる．

この方程式の解は次の級数の型で書くことができることを示そう．

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \int_0^t I_\delta(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} I_\delta(t_2)dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)u_0 dt_n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \int_0^t e^{\tau/\delta}d\tau \int_\tau^t I_\delta(t_1)dt_1 \int_\tau^{t_1} I_\delta(t_2)dt_2 \cdots \int_\tau^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)F(\tau)dt_n \end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.6)を形式的に(2.5)に代入すれば，恒等的に満たされている．級数(2.6)と t に関して微分した級数の収束性の証明が残っている．

条件 4) より

$$\left\|\int_\tau^t I_\delta(t_1)dt_1\int_\tau^{t_1} I_\delta(t_2)dt_2\cdots\int_\tau^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)F(\tau)dt_n\right\|_B \leqq \frac{M(t-\tau)^n}{(1-\delta\omega)^n n\,!}\|F(\tau)\|_B. \qquad (2.7)$$

(2.7) と同様に

$$\left\|\int_0^t I_\delta(t_1)dt_1\int_0^{t_1} I_\delta(t_2)dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)u_0dt_n\right\|_B \leqq \frac{Mt^n}{(1-\delta\omega)^n n\,!}\|u_0\|_B.$$

これらの不等式より，級数(2.6)は収束し，また v に対して

$$\begin{aligned}\|v\| &\leqq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\delta^n}\left\{\left\|\int_0^t I_\delta(t_1)dt_1\cdots\int_0^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)dt_n u_0\right\|_B\right.\\ &\quad \left.+\int_0^t e^{\tau/\delta}d\tau\left\|\int_\tau^t I_\delta(t_1)dt_1\cdots\int_\tau^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)F(\tau)dt_n\right\|_B\right\}\\ &\leqq M\|u_0\|_B\sum_{n=0}^\infty\frac{t^n}{\delta^n(1-\delta\omega)^n n!}+M\int_0^t\sum_{n=0}^\infty\frac{(t-\tau)^n}{\delta^n(1-\delta\omega)^n n!}e^{\tau/\delta}\|F(\tau)\|_B d\tau\\ &= M\exp\left(\frac{t}{\delta(1-\omega\delta)}\right)\left[\|u_0\|_B+\int_0^t\exp\left\{\frac{\tau}{\delta}\left(1-\frac{1}{1-\omega\delta}\right)\right\}\|F(\tau)\|_B d\tau\right]\\ &\leqq M\exp\left(\frac{t}{\delta(1-\omega\delta)}\right)\left\{\|u_0\|_B+\int_0^t\|F(\tau)\|_B d\tau\right\}\end{aligned}$$

が成り立つ．同様に t について微分した級数も収束する．したがって級数(2.6)は方程式(2.5)を満たす．この方程式の解の一意性は，対応する積分方程式

$$v(t) = u_0+\int_0^t F(\tau)e^{\tau/\delta}d\tau+\frac{1}{\delta}\int_0^t I_\delta(\tau)v(\tau)d\tau$$

の解の一意性より導かれる．

以上により $u_\delta(t)=e^{-t/\delta}v(t)$ であるから

$$\begin{aligned}\|u_\delta(t)\|_B &\leqq e^{-t/\delta}\|v(t)\|_B\\ &\leqq M\exp\left\{\frac{\omega}{1-\delta\omega}t\right\}\left\{\|u_0\|_B+\int_0^t\|F(\tau)\|_B d\tau\right\} \qquad (2.8)\end{aligned}$$

を得る．$\omega_1>\omega$ とし，十分小さい δ に対して $\omega_1>\dfrac{\omega}{1-\delta\omega}$ であるから，そのような δ に対しては

$$\|u_\delta(t)\|_B \leqq M\exp(\omega_1 s)\left\{\|u_0\|_B+\int_0^s\|F(\tau)\|_B d\tau\right\} \qquad (0\leqq t\leqq s)$$

が成り立つ．よって

$$\max_{0\leqq t\leqq s}\|u_\delta(t)\|_B \leqq M\exp(\omega_1 s)\left\{\|u_0\|_B+\int_0^s\|F(t)\|_B dt\right\}.$$

すなわち $\|L_\delta^{-1}\|\leqq M\exp(\omega_1 s)$.

結局，作用素 L_δ と L は逆作用素に関する定理 3.2 の条件を満たしていることから，$\lim_{\delta\to 0} L_\delta^{-1}=L^{-1}$ が存在し，有界であり，$\|L^{-1}\|\leqq M\exp(\omega_1 s)$ が成り立つ．

よって $Lu=\{u_0, F(t)\}$ に対応する問題

$$\frac{du}{dt}-A(t)u = F(t), \qquad u(0)=u_0$$

の解は一意であり，評価式(2.1)を満たす．よって補題は示された．

§3　発展方程式の摂動論

1°　抽象的定理

定理 4.1　$A(t)$ $(0\leqq t\leqq t_0)$ を Banach 空間 B における稠密な定義域 D をもつ作用素とする．すべての t，$0<\varepsilon<\varepsilon_0$ に対して

$$\|[I-\varepsilon A(t)]^{-1}\|\leqq 1 \tag{A}$$

を満たしているとする．作用素の列 $\{A_n(t)\}$ は条件(A)を満たし，さらに $C[B]$ に属し，D の値をとりその微分が $L_1[B]$ に属する函数からなる $C[B]$ において稠密な集合 D_t の元 $g(t)$ に対して

$$\int_0^t \|[A_n(t)-A(t)]g(t)\|dt\to 0 \quad (n\to\infty) \tag{3.1}$$

が成り立つとする．

そのとき，方程式

$$\frac{du_n(t)}{dt}-A_n(t)u_n(t)=F_n(t), \qquad u_n(0)=g_n$$

の解 $u_n(t)$ は，もし $n\to\infty$ のとき

$$\|g_n-g\|_B\to 0, \qquad \int_0^t \|F_n(\tau)-F(\tau)\|_B d\tau\to 0 \tag{3.2}$$

であり

$$Lu(t)=F(t), \qquad u(0)=g$$

の解 $u(t)$ が存在すれば，$u_n(t)$ は $u(t)$ に t について一様に収束する．ここで L は D_t 上で定義された作用素 $d/dt-A(t)$ の閉包である．

証明　$C[B]$ から $B\oplus L_1$ への作用素 L_n と $\tilde{L}$ とを考えよう：

$$L_n u_n(t)=\left\{u_n(0), \frac{du_n(t)}{dt}-A_n(t)u_n(t)\right\},$$

$$\tilde{L}u(t) = \{u(0), Lu(t)\}.$$

条件(3.1)から$\{L_n\}$は作用素 $\tilde{L}$ に収束する．また補題4.1より$\|L_n{}^{-1}\|\leqq 1$，これより定理3.2を用いると主張が示される．

2° 微分方程式における例

方程式

$$i\frac{\partial u_n(t,x)}{\partial t} - n^{1-\delta}t^n\Delta u_n(t,x) + c^2(t,x)u_n(t,x) = F_n(t,x)$$

を $0\leqq t\leqq 1$ において考えよう．ここで $c^2(t,x)\leqq 1$ は連続函数，$\delta>0$ である．初期条件 $u_n(0)=0, F_n(t,x)\in C[L_2]$のもとで解く．$x$ について2回連続微分可能，t について1回連続微分可能な函数 $v(t,x)$ に対して，$n\to\infty$ のとき

$$\int_0^1 \|n^{1-\delta}t^n\Delta v(t,\cdot)\|_{L_2}dt \to 0$$

である．また作用素$\dfrac{1}{i}n^{1-\delta}t^n\Delta$ は条件 A を満たす．定理4.1の条件はすべて満たされているから $u_n(t,x)$ は t について一様に

$$-i\int_0^t \exp\left\{i\int_\tau^t c^2(x,s)ds\right\}F(x,\tau)d\tau$$

に L_2 収束する．ここで $F(x,\tau)=\lim_{n\to\infty}F_n(x,\tau)$.

§4 半群の摂動論

1° 基本的補題

$A(t)$ を Banach 空間 B からそれ自身への作用素で共通の稠密な定義域 D をもつものとする．$A(t)$ は t に連続的に依存している．すなわち，すべての $g\in D$ に対して

$$\lim_{t\to t_1} A(t)g = A(t_1)g$$

が成り立っているとする．$F(t)$ を Bochner 可積分な函数とする．方程式

$$\frac{du}{dt} - A(t)u = F(t) \tag{4.1}$$

を考えよう．この方程式の解としては t について連続な B 値函数で，$t=0$ において初期条件

$$u(0)\in B \tag{4.2}$$

を満たすものを考える．以前と同じように $C[B]$ から $V=B\oplus L_1[B]$ への線型写像 L を定義しよう．

$$Lu(t)=\left\{u(0),\ \frac{du}{dt}-A(t)u\right\}\in V$$

$D(d/dt)\cap D$ に属し，方程式(4.1)および初期条件(4.2)を満たす函数 $u(t)$ を古典的な解という．また，もし

$$\frac{du_n}{dt}-A(t)u_n=F_n(t)$$

の古典的な解 $\{u_n(t)\}$ があって

$$\max_{0\leqq t\leqq s}\|u_n(t)-u(t)\|_B\to 0\qquad(n\to\infty)$$

であり，$u_n(0)\to u(0)$, $\displaystyle\int_0^s\|F_n(t)-F(t)\|_B dt\to 0$ であれば，$u(t)$ を方程式の解という．

作用素 $A(t)$ は，もし次の 1, 2 を満たしているとき，条件(P)を満たしているという．

1) $A(t_1)$ と $A(t_0)$ は可換である．

2) $(1-\varepsilon A(t))^{-1}$ は $0\leqq\varepsilon\leqq\varepsilon_0$ で存在し，そのノルムは 1 で押えられる．

$A(t)$ が条件(P)を満たすとき $A(t)\in(\mathrm{P})$ と書くことにする．この節の最初に仮定したこと，および条件 2) より $u_0\in D$, $F(t)\in D$ ならば古典的な解が存在する (Kato[1])．

補題 4.2 $A_n(t), A(t)\in(\mathrm{P})$, $F_n(t), F(t)\in L_1[B]$, $g_n, g\in B$ とする．次の三つの条件が成り立っているとしよう：

$n\to\infty$ のとき

$$\int_0^s\|F_n(t)-F(t)\|_B dt\to 0 \tag{4.3}$$

$$g_n\to g. \tag{4.4}$$

すべての $h\in B$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ に対して

$$\int_0^s\|[I-\varepsilon A_n(t)]^{-1}h-[I-\varepsilon A(t)]^{-1}h\|_B dt\to 0 \tag{4.5}$$

このとき，初期値問題

$$\frac{du_n(t)}{dt}-A_n(t)u_n(t)=F_n(t)$$

$$u_n(0)=g_n$$

の解 $u_n(t)$ は，問題

$$\frac{du(t)}{dt}-A(t)u(t)=F(t)$$

$$u(0)=g$$

の解 $u(t)$ に，t について一様に近づく，すなわち

$$\max_{0\leqq t\leqq s}\|u_n(t)-u(t)\|_B\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

証明　補題の条件より，$I_{n,\varepsilon}(t)=(I-\varepsilon A_n(t))^{-1}$ は $L_1[B]$ において $I_\varepsilon(t)=(I-\varepsilon A(t))^{-1}$ に収束する．したがって，$B_{n,\varepsilon}(t)=A_nI_{n,\varepsilon}=\dfrac{1}{\varepsilon}(I-I_{n,\varepsilon})$ は $B_\varepsilon(t)=A(t)I_\varepsilon=\dfrac{1}{\varepsilon}(I-I_\varepsilon)$ に $L_1[B]$ の強位相の意味で収束する．すなわち，任意の $g(t)\in L_1[B]$ に対して

$$\int_0^s\|B_{n,\varepsilon}(t)g(t)-B_\varepsilon(t)g(t)\|_B dt\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

である．

$C[B]\subset L_1[B]$ であるから，$C[B]$ から V への作用素 $L_\varepsilon^{(n)}$，すなわち

$$L_\varepsilon^{(n)}u(t)=\left\{u(0),\ \frac{du}{dt}-B_{n,\varepsilon}u\right\}$$

は

$$L_\varepsilon u(t)=\left\{u(0),\ \frac{du}{dt}-B_\varepsilon u\right\}$$

に，$C[B]$ に属しその導函数が $L_1[B]$ に属するような集合上で収束する．この集合は L_ε の定義域でもある．式(2.1)より $\|(L_\varepsilon^{(n)})^{-1}\|\leqq 1$ である．よって L_ε の値域において(V 上で)定理3.2より

$$(L_\varepsilon^{(n)})^{-1}\to L_\varepsilon^{-1} \qquad (n\to\infty)$$

となる．換言すれば，任意の $\varphi\in V$ および任意の $\delta>0$ に対して，$n_{\delta,\varphi}(\varepsilon)$ が存在し，$n>n_{\delta,\varphi}(\varepsilon)$ であれば

$$\max_{0\leqq t\leqq s}\|(L_\varepsilon^{(n)})^{-1}\varphi-L_\varepsilon^{-1}\varphi\|_B\leqq\delta \tag{4.6}$$

が成り立つ．一方，補題4.1で示されたように $\varepsilon\leqq\varepsilon_\delta$ ならば

$$\max_{0\leqq t\leqq s}\|L_\varepsilon^{-1}\varphi-L^{-1}\varphi\|_B\leqq\delta$$

である．$L_1[B]$ において単函数は稠密であることはよく知られている．$f(t)$ を D に値をとる次のような2値函数とする．

$$f(t)=\begin{cases} f_1 & t<t_0 \\ f_2 & t>t_0 \end{cases} \qquad (f_1, f_2 \in D)$$

$C[B]$ から V への作用素 $L^{(n)}$

$$L^{(n)}u(t)=\left\{u(0),\ \frac{du}{dt}-A_n(t)u(t)\right\}\in V$$

を考えよう．

$$(L_\varepsilon{}^{(n)})^{-1}\{g, f(t)\}-(L^{(n)})^{-1}\{g, f(t)\}=u_{n,\varepsilon}-u_n$$

とおく．$u_{n,\varepsilon}$ と u_n は $D\left(\dfrac{d}{dt}\right)\cap D(A_n(t))$ に属する．

$$\begin{aligned}
L^{(n)}(u_{n,\varepsilon}-u_n) &= \left\{0,\ \frac{du_{n,\varepsilon}}{dt}-A_n(t)u_{n,\varepsilon}-f-B_{n,\varepsilon}(t)u_{n,\varepsilon}+B_{n,\varepsilon}(t)u_{n,\varepsilon}\right\} \\
&= \{0,\ [B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t)]u_{n,\varepsilon}\} \\
&= \left\{0,\ [B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t)]\int_0^t \exp\left[\left(\int_\tau^t B_{n,\varepsilon}(x)dx\right)\right]f(\tau)d\tau \right.\\
&\qquad \left. +[B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t)]h\right\}^{1)} \\
&= \left\{0,\ \int_0^t \exp\left[\int_\tau^t B_{n,\varepsilon}(x)dx\right][B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t)]f(\tau)d\tau \right.\\
&\qquad \left. +[B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t)]h\right\},\quad h=\exp\left[\int_0^t B_{n,\varepsilon}(x)dx\right]g,
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}
\|L^{(n)}(u_{n,\varepsilon}-u)\|_B &\leqq \int_0^t \left\|\exp\left[\int_\tau^t B_{n,\varepsilon}(x)dx\right][B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t)]f(\tau)\right\|_B d\tau \\
&\qquad +\|(B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t))h\|_B \\
&\leqq \int_0^s \|[B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t)]f(\tau)\|_B d\tau+\|(B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t))g\|_B
\end{aligned}$$

である[2]．ここで $\left\|\exp\left[\int_\tau^t B_{n,\varepsilon}(x)dx\right]\right\|\leqq 1$ を用いた．これより

$$\int_0^s \|L^{(n)}(u_{n,\varepsilon}-u_n)\|_B dt$$

---

1)〔訳注〕 原著ではこの項が落ちている．この項が零に収束することも以下の議論と同じようにして示せる．

2)〔訳注〕 $\|L^{(n)}(v)\|_B$ は $\left\|\dfrac{dv}{dt}-A_n(t)v\right\|_B$ の意味である．

$$\leqq \int_0^s dt \int_0^s \|(B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t))f(\tau)\|_B d\tau + \int_0^s \|(B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t))h\|_B dt$$

$$\leqq t_0 \int_0^s \|(B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t))f_1\|_B dt + (s-t_0)\int_0^s \|(B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t))f_2\|_B dt$$

$$+ \int_0^s \|(B_{n,\varepsilon}(t)-A_n(t))h\|_B dt$$

$$\leqq C\Big(\int_0^s \|(I_{n,\varepsilon}(t)-I)A_n(t)f_1\|_B dt + \int_0^s \|(I_{n,\varepsilon}(t)-I)A_n(t)f_2\|_B dt$$

$$+ \int_0^s \|(I_{n,\varepsilon}(t)-I)A_n(t)h\|_B dt\Big). \tag{4.8}$$

$f\in D$ に対して，定積分

$$I = \int_0^s \|(I_{n,\varepsilon}(t)-I)A_n(t)f\|_B dt$$

は，$n\to\infty$ のとき，零に収束する，なぜなら

$$I = \int_0^s \|(I_{n,\varepsilon}(t)-I)[A_n(t)-A(t)+A(t)]f\|_B dt$$

$$\leqq \int_0^s \|(I_{n,\varepsilon}(t)-I)[A_n(t)-A(t)]f\|_B dt + \int_0^s \|(I_{n,\varepsilon}(t)-I)A(t)f\|_B dt$$

において，第1項は

$$2\int_0^s \|[A_n(t)-A(t)]f\|_B dt$$

で上から評価することができるので，$n\to\infty$ とともにいくらでも小さくできる．すなわち，$\delta>0$ に対して，$n>n_\delta$ ならば

$$I \leqq \delta + \int_0^s \|[I_{n,\varepsilon}(t)-I]A(t)f\|_B dt$$

となる．第2項を評価しよう．$q(t)$ を単函数とし，

$$\int_0^s \|q(t)-A(t)f\|_B dt \leqq \delta$$

が成り立つとする．$t_k\leqq t<t_{k+1}, k=1,2,\cdots,k_\delta$ において $q(t)=q_k$ とする．$\gamma_k\in D$ を $\|\gamma_k-q_k\|\leqq\delta$ であるようにとる．単函数 $\gamma_\delta(t)$ を $t_k\leqq t<t_{k+1}$ において $\gamma_\delta(t)=\gamma_k$ と定める．このとき

$$\int_0^s \|\gamma_\delta(t)-q(t)\|_B dt = \sum_{k=1}^{k_\delta}\|\gamma_k-q_k\|(t_{k+1}-t_k) \leqq \delta\cdot s$$

が成立する．したがって

$$\int_0^s \|\gamma_\delta(t)-A(t)f\|_B dt \leqq \delta(1+s). \tag{4.9}$$

また

$$\begin{aligned} I &\leqq \delta+\int_0^s \|[I_{n,\varepsilon}(t)-I]A(t)f\|_B dt \\ &\leqq \delta+\int_0^s \|[I_{n,\varepsilon}(t)-I][A(t)f-\gamma_\delta(t)]\|_B dt+\int_0^s \|(I_{n,\varepsilon}(t)-I)\gamma_\delta(t)\|_B dt \end{aligned} \tag{4.10}$$

である．式

$$\begin{aligned} [I_{n,\varepsilon}(t)-I]\gamma_\delta(t) &= \{I_{n,\varepsilon}(t)-I_{n,\varepsilon}(t)(I-\varepsilon A_n(t))\}\,\gamma_\delta(t) \\ &= \varepsilon I_{n,\varepsilon}A_n(t)\gamma_\delta(t) \end{aligned}$$

を思いおこそう．この式より

$$\|[I_{n,\varepsilon}(t)-I]\gamma_\delta(t)\| \leqq \varepsilon\|A_n(t)\gamma_\delta(t)\|.$$

結局(4.10)より

$$\begin{aligned} I &\leqq \delta+2\int_0^s \|A(t)f-\gamma_\delta(t)\|dt+\varepsilon\int_0^s \|A_n(t)\gamma_\delta(t)\|dt \\ &\leqq \delta+2\delta(1+s)+\varepsilon\int_0^s \|A_n(t)\gamma_\delta(t)\|dt. \end{aligned}$$

したがって，

$$n > n_\delta' \quad \text{で} \quad \varepsilon \leqq \varepsilon_\delta = \frac{\delta}{2\int_0^s \|A(t)\gamma_\delta(t)\|dt} \leqq \frac{\delta}{\int_0^s \|A_n(t)\gamma_\delta(t)\|dt}$$

であるならば

$$I \leqq 4\delta+2\delta s.$$

(4.8)の第3項も同様に評価できるから

$$\int_0^s \|L^{(n)}(u_{n,\varepsilon}-u_n)\|_B dt \leqq C(s)\cdot\delta$$

を得る．$\|(L^{(n)})^{-1}\|\leqq 1$ であるから，$n>n_\delta'$, $\varepsilon\leqq\varepsilon_\delta'$ ならば

$$\begin{aligned} \max_{0\leqq t\leqq s} \|u_{n,\varepsilon}-u_n\|_B &= \max_{0\leqq t\leqq s} \|(L^{(n)})^{-1}\{L^{(n)}(u_{n,\varepsilon}-u_n)\}\|_B \\ &\leqq \int_0^s \|L^{(n)}(u_{n,\varepsilon}-u_n)\|_B dt \leqq C(s)\cdot\delta. \end{aligned}$$

すなわち

$$\max_{0\le t\le s}\|\{(L_\varepsilon{}^{(n)})^{-1}-(L^{(n)})^{-1}\}\{f(t)\}\|\leqq\delta\,\text{const.}$$

(4.6) と (4.7) より $\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_\delta,\varepsilon_\delta'\}$ とすると，$n>n_\delta'$ かつ $n>n_{\delta,\varphi}(\varepsilon_0)$ ならば

$$\begin{aligned}\max_{0\le t\le s}\|\{(L^{(n)})^{-1}-L^{-1}\}\{f(t),g\}\|_B &\leqq \max_{0\le t\le s}\|\{(L^{(n)})^{-1}-(L_{\varepsilon_0}{}^{(n)})^{-1}\}\{f(t),g\}\|_B\\ &\quad+\max_{0\le t\le s}\|\{(L_{\varepsilon_0}{}^{(n)})^{-1}-L_{\varepsilon_0}{}^{-1}\}\{f(t),g\}\|_B\\ &\quad+\max_{0\le t\le s}\|\{L_{\varepsilon_0}{}^{-1}-L^{-1}\}\{f(t),g\}\|_B\leqq\delta\,\text{const.}\end{aligned}$$

δ は任意の正の数であるから

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le s}\|\{(L^{(n)})^{-1}-L^{-1}\}\{f(t),g\}\|_B=0 \tag{4.11}$$

が D に値をとる任意の2値函数 $f(t)$ に対して成り立つ．D は B において稠密であるから，B–値2値函数 $g(t)$ 対して

$$\int_0^s\|g(t)-f(t)\|_B dt\leqq\varepsilon$$

となる D–値2値函数がとれる．また $L_1[B]$ において2値函数の有限和(単函数)は稠密である．したがって $\|(L^{(n)})^{-1}\|\leqq 1$ であるから Banach–Steinhaus の定理より，(4.11)はすべての $F(t)\in L_1[B]$ に対して成り立つ．さて $\{g_n,F_n(t)\}$ を Banach 空間 V の元で $\{g,F(t)\}$ に収束するとしよう．このとき

$$\begin{aligned}&\max_{0\le t\le s}\|(L^{(n)})^{-1}\{g_n,F_n(t)\}-(L^{(n)})^{-1}\{g,F(t)\}\|_B\\ &\leqq\int_0^s\|F_n(t)-F(t)\|_B dt+\|_B g_n-g\|_B\to 0\end{aligned}$$

が成り立つ．(4.11) と組み合せると

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le s}\|\overline{(L^{(n)})^{-1}}\{g_n,F_n(t)\}-\overline{L^{-1}}\{g,F(t)\}\|_B=0$$

を得る．これで補題は示された．

2° 一般的な Hille の定理

定理 4.2 T_t を強連続半群で

$$\|T_t\|\leqq 1 \tag{4.12}$$

を満たしているとする．A をその生成作用素とする．作用素の列 $\{A_n\}$ があって，その稠密な共通の定義域 D で $\lim_{n\to\infty}A_n=A$ が成り立っており，条件 (P)–2 を満たしているとする．このとき $(I-tA_n/n)^{-n}$ は $n\to\infty$ のとき，T_t に強収束する．

証明 $u_n(t)=(I-tA_n/n)^{-n}u_0$ $(u_0\in D)$ は微分方程式

$$\frac{du_n}{dt}-\left(I-\frac{tA_n}{n}\right)^{-1}A_nu_n=0, \qquad u_n(0)=u_0 \tag{4.13}$$

を満たす．条件(P)-2より $(I-tA_n/n)^{-1}$ は B のすべての元に対して定義され，そのノルムは一様に1以下である．定理3.2より

$$\left(I-\frac{tA_n}{n}\right)^{-1}\to I \qquad (n\to\infty)$$

である．$g\in D$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(I-\frac{tA_n}{n}\right)^{-1}A_ng-Ag\right\|_B \\
&\leqq \left\|\left(I-\frac{tA_n}{n}\right)^{-1}(A_n-A)g\right\|_B+\left\|\left\{\left(I-\frac{tA_n}{n}\right)^{-1}-I\right\}Ag\right\|_B \\
&\leqq \|(A_n-A)g\|_B+\left\|\left\{\left(I-\frac{tA_n}{n}\right)^{-1}-I\right\}Ag\right\|_B\to 0 \qquad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

すなわち D 上で $(I-tA_n/n)^{-1}A_n\to A$ である．$B_{n,\varepsilon}=A_n(I-\varepsilon A_n)^{-1}$ とおく．$\|\exp(tB_{n,\varepsilon})\|\leqq 1$ および $\|(I-\delta B_{n,\varepsilon})^{-1}\|\leqq 1$ $(\delta>0)$ が成り立つ．したがって

$$\left\|\left[I-\delta A_n\left(I-\frac{tA_n}{n}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\|=\|[I-\delta B_{n,t/n}]^{-1}\|\leqq 1.$$

補題4.2の条件は(4.13)に対して成り立っている．結局 $u_n(t)$ はCauchy問題

$$\frac{du}{dt}=Au \qquad u(0)=u_0$$

の解 $u(t)$ に収束する．A_n が有界作用素のときは定理4.2はHille[1]に証明されている．

3° 生成作用素の収束と半群の収束

定理 4.3 A_n を稠密な定義域 D 上で A に近づく作用素とし，$\{(I-\varepsilon A_n)^{-1}\}$ $(0<\varepsilon\leqq\varepsilon_0, n=1,2,\cdots)$ はいたるところ定義され，そのノルムは1以下であるとする．また $(I-\varepsilon A_n)^{-1}$ は $(I-\varepsilon A)^{-1}$ に強収束すると仮定しよう．このとき半群 $\exp(tA_n)$ は e^{tA} に強収束する．

この定理は，補題4.2において，$A_n(t)=A_n, A(t)=A, F(t)=0, g_n=g$ とすれば直ちに導かれる．

定理4.3より次の主張が導かれる．

定理 4.4 (Маслов[12]) $\{T_t^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$，$\{T_t\}$ を強連続半群とし，その生成作用素を A_n $(n=1,2,\cdots)$，A とする．$\|T_t^{(n)}\|\leqq 1$，また $D(A_n)$ は共通と

しそれを D とする．$x\in D$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = A_\infty x$$

は存在するとしよう．このとき，もし $A=\overline{A_\infty}$ であるならば，$\{T_t^{(n)}\}$ は $n\to\infty$ のとき T_t に有限区間 $0\leqq t\leqq s$ で一様に強収束する．

証明（第1章§2参照）　$\|T_t^{(n)}\|\leqq 1$ より，$\|(I-\varepsilon A_n)^{-1}\|\leqq 1$ が得られる．したがって定理3.2より，すべての $\varepsilon>0$ に対して $(I-\varepsilon A_n)^{-1}\to(I-\varepsilon A)^{-1}$ である．定理4.3の条件は満たされており，定理の主張が示される．

例　初期値境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}-h\Delta u-\frac{\partial u}{\partial x}+c^2u = F(x,y) \tag{4.14}$$

$$u|_{t=0}=0, \qquad u|_{x^2+y^2=1}=0 \qquad (0\leqq t<1)$$

を t について連続な $L_2[x^2+y^2<1]$ 値函数の空間で考えよう．

$$A_h u = h\Delta u+\frac{\partial u}{\partial x}-c^2u$$

$$Au = \frac{\partial u}{\partial x}-c^2u$$

とする．作用素 $(I-A_h)^{-1}$ のノルムは1以下である（§3-2° を参照）．一方境界値問題

$$u-\varepsilon\left(h\Delta u+\frac{\partial u}{\partial x}-c^2u\right) = F(x,y)$$

$$u|_{x^2+y^2=1}=0$$

の解 $u_{\varepsilon,h}$ は $h\to 0$ のとき

$$v-\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial x}-c^2v\right)= F(x,y)$$

$$v|_{x=\sqrt{1-y^2}}=0$$

の解 v_ε に近づくことはよく知られている．したがって定理4.3より，方程式(4.14)の解 u_h は t について L_2 の意味で

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}+c^2u = F$$

$$u|_{x=\sqrt{1-y^2}}=0, \qquad u|_{t=0}=0$$

の解 u に近づく．

第5章　作用素の弱収束

§1　連続群における準同型写像の収束に関する定理

まず，連続群論におけるいくつかの定義を Понтрягин[1]にしたがって思い出そう．

集合 G は G の任意の元 a, b に対してその積 ab が定まって以下の性質を満たすとき，群であると定義する．

1)　$(ab)c = a(bc)$.

2)　任意の元 $a \in G$ に対して，$ea = a$ を満たす左単位元 $e \in G$ が存在する．

3)　任意の元 $a \in G$ に対して $a^{-1}a = e$ なる左逆元 a^{-1} が存在する．

一般に，ab と ba は異なることに注意しよう．

A, B を G の部分集合としたとき，

$$AB = \{xy ; x \in A, y \in G\}, \qquad A^{-1} = \{x^{-1} ; x \in A\}$$

$$A^m = \{x_1 x_2 \cdots x_m ; x_j \in A\}, \qquad A^{-m} = (A^{-1})^m$$

と表わすことにする．この記号を上に述べた事柄を表現するのに利用することができる．たとえば，

$$AG = GA = G, \qquad (A \neq \phi)$$

$$G^{-1} = G$$

$$Ae = eA = A.$$

$H \subset G$ が $H^2 = H, H^{-1} = H$ を満たすとき，G の部分群であるという．群 G から群 G^* への写像 g が

$$g(xy) = g(x)g(y), \ (x, y \in G)$$

を満たすとき，g を準同型写像，集合 $g^{-1}(e^*)$ を準同型写像 g の核という．

集合 R は，R の任意の部分集合 M に対して M の閉包 $\bar{M}$ が定まって次の性質を満たすとき位相空間であるという．

1)　$M = \{a\}$ のときは $\bar{M} = M$.

2)　$\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$.

3)　$\bar{\bar{M}} = \bar{M}$.

$\bar{F}=F$ が成り立つとき，R の部分集合 F は閉集合であるという．$R\backslash G$ が閉集合のとき，G を開集合という．G が R でいたるところ稠密であるとは，$\bar{G}=R$ が成り立つことである．

R の開集合の系 Σ が R の基であるとは，R の任意の開集合が Σ に属する集合の和として得られることである．Σ が R の任意の点の近傍全体からなるとき，Σ は R の完備な近傍系であるといわれる．Σ' が点 a の基本近傍系または完全近傍系であるとは，$a \in G$ なる任意の開集合 G に対して，a の近傍 $U \in \Sigma'$ が存在して $U \subset G$ を満たすことである．なお，R の完備な基本近傍系を与えれば，一意に M の閉包を定めることができることにも注意しよう．

位相空間 R から位相空間 R' への写像 f が同相写像または位相写像であるとは，f が次の条件を満たすことである．

1) f は全単射．

2) $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$, $(M \subset R)$.

f が同相写像ならば，f^{-1} もまた同相写像であることは見易い．R から R' への同相写像が存在するとき，R と R' は位相同型であるという．

R から R' への写像が連続であるとは，$g(\bar{M}) \subset \overline{g(M)}$ $(M \subset R)$ が成り立つことである．

G が位相群であるとは，以下の条件が満たされることである．

1) G は群である．

2) G は位相空間である．

3) 群演算は連続である．すなわち，

a) 任意の $a, b \in G$ と ab の任意の近傍 W に対して，a, b の近傍 U, V が存在して，

$$UV \subset W.$$

b) 任意の元 $a \in G$ と a^{-1} の任意の近傍 V に対して a の近傍 U が存在して

$$U^{-1} \subset V.$$

G を位相群とし，Σ^* を G の単位元 e の基本近傍系，M を G でいたるところ稠密な集合とする．このとき，$\Sigma = \{Ux; U \in \Sigma^*, x \in M\}$ は，G の開集合の基をなす．かつ，任意の $U \in \Sigma^*$ に対して，

$$VV^{-1} \subset U$$

なる $V \in \Sigma^*$ が存在する．

位相群 G から位相群 G^* への写像 g が連続準同型であるとは，次の条件を満たすことである．

1)　g は群 G から G^* への準同型である．

2)　g は位相空間 G から G^* への連続写像である．

定義　位相群 H_1 から位相群 H_2 への連続準同型の列 $\{g_n\}$ が，漸近的に同程度連続であるとは，H_2 の単位元 e^* の任意の近傍 ε に対して，自然数 n_ε と e の近傍 δ が存在して，

$$g_n x \in \varepsilon, \quad (x \in \delta,\ n > n_\varepsilon)$$

を満たすことである．特にこのとき，$x_k \to e$ ならば，

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} g_n x_k = e^*$$

が成り立つ．

定理 5.1　$\{g_n\}$ を位相群 H_1 から位相群 H_2 への漸近的に同程度連続な連続準同型の列で，各 g_n は単射であるとする．$R = \bigcap_{n=1}^{\infty} g_n(H_1)$ と表わす．$D = \lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(R)$ が存在すると仮定する[1]．このとき，$\lim_{n\to\infty} g_n(\bar{D})$ が存在して，$\bar{D} \subset H_1$ から H_2 への連続準同型となり，次の 1)，2) が成り立つ．

1)　$\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(x^*) = g^{-1}(x^*), \quad (x^* \in R).$

2)　$a_k \in H_1,\ x_i \in \bar{D}$ が

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ i\to\infty}} a_k x_i = e$$

を満たすならば

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty \\ i\to\infty}} g_n(a_k) g(x_i) = e^*.$$

証明　R から H_1 への写像 T を $Tx^* = \lim_{n\to\infty} g_n^{-1} x^*$ で定義すると，T は群としての準同型写像である．実際，

$$\begin{aligned} T(x_1^* x_2^*) &= \lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(x_1^* x_2^*) = (\lim_{n\to\infty} g_n^{-1} x_1^*)(\lim_{n\to\infty} g_n^{-1} x_2^*) \\ &= Tx_1^* Tx_2^*, \quad (x_1^*,\ x_2^* \in R). \end{aligned}$$

つぎに，T は単射であることを示そう．

1)　すなわち，任意の $x^* \in R$ に対して $\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(x^*)$ が存在すると仮定する．

$\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(x^*)=e$ とする．e^* の任意の近傍 ε に対して，n_ε と e の近傍 $\delta=\delta[\varepsilon]$ が存在して，$g_n x\in\varepsilon\ (n\geqq n_\varepsilon, x\in\delta)$ であるから，自然数 $N\geqq n_\varepsilon$ が存在して，

$$g_n[g_n^{-1}(x^*)] = x^*\in\varepsilon, \quad (n\geqq N).$$

したがって，$x^*=e^*$.

任意の $x\in D$ に対して，$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=T^{-1}(x)$ であることを示そう．

実際，$T^{-1}x\in R$ であり，$\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(T^{-1}(x))=x$ であるから，e^* の任意の近傍 ε に対して，K が存在して，

$$y_k = g_k^{-1}(T^{-1}(x))x^{-1} = g_k^{-1}(T^{-1}(x)[g_k(x)]^{-1})\in\delta[\varepsilon],$$
$$(k\geqq K).$$

ゆえに，$n\geqq n_\varepsilon, k\geqq K$ ならば，

$$g_n(y_k)\in\varepsilon.$$

したがって，$n\geqq\max\{n_\varepsilon, K\}$ ならば，

$$g_n(y_n) = T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1}\in\varepsilon.$$

これは，$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=T^{-1}(x)$ を意味する．

T^{-1} は連続である．実際，任意の ε に対して，$\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1}\subset\varepsilon$ なる e^* の近傍 ε_1 を一つ定め，

$$g_n x\in\varepsilon_1, \qquad (n\geqq N,\ x\in\delta_1)$$

であるとする．さらに，$N_1(\varepsilon_1^{-1}, \delta[\varepsilon_1^{-1}], x)$ が存在して，

$$T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1}\in\varepsilon_1^{-1}, \qquad (n\geqq N_1)$$

であるから，$n\geqq\max\{N, N_1\}$ ならば，

$$T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1}g_n(x)\in\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_1\subset\varepsilon.$$

すなわち，$T^{-1}(x)\subset\varepsilon\ (x\in\delta_1[\varepsilon_1])$ が成り立ち，T^{-1} は連続であることが示された．D の上では，T^{-1} に一致するような $\bar{D}$ から H_2 への準同型写像を g とする[1)]．そのとき次の等式が成り立つことを示そう．

$$\lim_{n\to\infty} g_n\bar{D} = g\bar{D}.$$

$y\in\bar{D}$, $x\in D$, $x^{-1}y\in\delta$ とする．$g_n(yx^{-1})=g_n(y)[g_n(x)]^{-1}$ かつ $g(yx^{-1})=g(y)[g(x)]^{-1}=g(y)[T^{-1}(x)]^{-1}$ であるから，

$$g_n(y)[g(y)]^{-1}=g_n(yx^{-1})g_n(x)[T^{-1}(x)]^{-1}[g(yx^{-1})]^{-1}.$$

---

1)〔訳注〕 H_2 が完備と仮定すれば，g の D から $\bar{D}$ への拡張が存在する．

$\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1}\subset\varepsilon$, $\varepsilon_2\varepsilon_2^{-1}\subset\varepsilon_1^{-1}$ とせよ．仮定より

$$g_n(yx^{-1})\in\varepsilon_1,\qquad (n>N(\varepsilon_1,\delta[\varepsilon_1]),\ \delta\subset\delta[\varepsilon_1])$$
$$g_n(x)[T^{-1}(x)]^{-1}\in\varepsilon_2,\qquad (n>N_1(x,\varepsilon_2))$$
$$g(yx^{-1})\in\varepsilon_2,\qquad (\delta\subset\delta[\varepsilon_2])$$

とできるから，$n>\max(N(\varepsilon_1,\delta[\varepsilon_1]),N_1(x,\varepsilon_2))$ かつ，$\delta\subset\delta[\varepsilon_1]\cap\delta[\varepsilon_2]$ ならば，

$$g_n(y)[g(y)]^{-1}\in\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_2^{-1}\subset\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1}\subset\varepsilon$$

が示される．ゆえに，$n>N(\varepsilon)$ のとき，

$$g_n(y)[g(y)]^{-1}\in\varepsilon.$$

2)の証明に移ろう．まず，条件 $\lim_{\substack{k\to\infty\\ i\to\infty}}a_kx_i=e$ から，$\lim_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}}x_i^{-1}x_k=e$ が得られることに注意する．実際，$\delta_1^{-1}\delta_1\subset\delta$, なる e の近傍 δ_1 に対して，N と K が存在して，

$$a_nx_i\in\delta_1,\qquad a_nx_k\in\delta_1,\qquad (n\geqq N,\ i,k\geqq K)$$

とできるから，$i,k\geqq K$ ならば，

$$x_i^{-1}x_k=(a_nx_i)^{-1}a_nx_k\subset\delta_1^{-1}\delta_1\subset\delta.$$

すなわち，$\lim_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}}x_i^{-1}x_k=e$ が示される．さて，$x_i\in\bar{D}, a_k\in H_1$ が条件 $\lim_{\substack{k\to\infty\\ i\to\infty}}a_kx_i=e$ を満たすとする．われわれは命題2)の証明に次の等式を用いる:

$$g_n(a_k)g(x_i)=g_n(a_kx_j)[g_n(x_j)]^{-1}g(x_j)g(x_j^{-1}x_i).$$

任意の ε に対して，$\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1}\subset\varepsilon, \varepsilon_2\varepsilon_2^{-1}\subset\varepsilon_1$ なる e^* の近傍 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ をとる．自然数 N, N_1,K,K_1 が存在して

$$g_n(a_kx_j)\in\varepsilon_1,\qquad (n\geqq N,\ k,j\geqq K),$$
$$[g(x_j)]^{-1}g_n(x_j)\in\varepsilon_2,\qquad (n\geqq N_1),$$
$$g(x_j^{-1}x_i)\in\varepsilon_2,\qquad (i,j\geqq K_1)$$

が成り立つ．ゆえに，われわれは，

$$g_n(a_k)g(x_i)\in\varepsilon,\qquad (n,k,i\geqq\max\{N,N_1,K,K_1\})$$

を得る．すなわち，

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ k\to\infty\\ i\to\infty}}g_n(a_k)g(x_i)=e^*$$

が成り立つ．(証明終り.)

§2. 漸近的同程度弱連続性

1° 弱連続な作用素列の一様有界性

B, B' を Banach 空間, $\mathcal{T}=\{T_n\}$ を B から B' への閉作用素の族とする. 弱収束を記号$\rightrightarrows$で表わす.

定義 0に弱収束する任意の列$\{f_k\}\subset B$に対し, $T_{n_k}f_k\rightrightarrows 0$ が成り立つとき, $\mathcal{T}$ は漸近的に同程度弱連続であるという. ここで n_k は任意の部分列である.

補題 5.1 $\mathcal{T}$ が漸近的に同程度弱連続で B が反射的ならば, $\mathcal{T}$ は一様有界である.

証明 証明は帰謬法による.

T_n は B 全体で定義されているから, 各 T_n は有界作用素である. (第2章§1を参照せよ.)

今, 任意の n に対して, $\|T_n\|\leqq C$ なる定数 C が存在しないと仮定すると, $\mathcal{T}$ の適当な部分列で,

$$\lim_{m\to\infty}\|T_m\|=\infty$$

なるものが存在する. したがって, $\|T_m{}^*\|=\|T_m\|$ ゆえ,

$$\lim_{m\to\infty}\|T_m{}^*\|=\infty$$

が成り立つ. ここで, B'^* の上の汎関数 $F_m(\varphi)=\|T_m{}^*\varphi\|$ を導入するならば, 上の事実は,

$$\sup_{\|\varphi\|\leqq 1}F_m(\varphi)=\|T_m{}^*\|\to\infty, \qquad (m\to\infty) \tag{2.1}$$

といいかえることができる.

有名な共鳴定理(Виленкин 他[1])により, $\varphi_0\in B'^*$ が存在して,

$$F_{m'}(\varphi_0)=\|T_{m'}{}^*\varphi_0\|\to\infty, \qquad (m'\to\infty)$$

が成り立つ. ここで $F_{m'}$ は F_m の適当な部分列である. 点列

$$f_{m'}=g_{m'}/\|T_{m'}{}^*\varphi_0\|^{3/2}$$

を導入しよう. ここで, $g_{m'}\in B$ は,

$$\|g_{m'}\|=\|T_{m'}{}^*\varphi_0\|, \qquad (g_{m'}, T_{m'}{}^*\varphi_0)=\|g_{m'}\|^2$$

を満たすものとする. したがって,

$$\|f_{m'}\|=\|T_{m'}{}^*\varphi_0\|^{-1/2}\to 0, \qquad (m'\to\infty).$$

かつ,

$$(\varphi_0, T_{m'}f_{m'}) = (T_{m'}{}^*\varphi_0, f_{m'})$$
$$= (T_{m'}{}^*\varphi_0, g_{m'})/\|T_{m'}{}^*\varphi_0\|^{3/2}$$
$$= \|T_{m'}{}^*\varphi_0\|^{1/2} \to \infty, \qquad (m' \to \infty).$$

これは矛盾である．よって証明された．

2° 作用素列が漸近的に同程度弱連続であるための必要十分条件

補題 5.2 反射的 Banach 空間 B で定義された作用素の列 $\mathcal{T}$ が漸近的に同程度弱連続であるための必要十分条件は，$\mathcal{T}^* = \{T_n{}^*\}$ が任意の $\varphi \in B'^*$ の上でコンパクトであることである．したがって，$\mathcal{T}^*$ が漸近的に同程度弱連続ならば，$T_n{}^*\varphi$ の弱収束から強収束が示される．

証明　1. 必要性. $\mathcal{T}$ を極限的に同程度弱連続な列とする．このとき補題 5.1 より任意の n に対して，

$$\|T_n\| = \|T_n{}^*\| \leqq C$$

が成り立つ．したがって，$T_n{}^*\varphi$ $(\varphi \in B'^*)$ は B^* で有界である．ゆえに，$T_n{}^*\varphi$ は弱点列コンパクトである(第2章§1を見よ)．この集合から弱収束する部分列を選ぼう: $T_{n'}{}^*\varphi \rightharpoonup g$. $\|(T_{n'}{}^*\varphi)^*\| = \|T_{n'}{}^*\varphi\| \leqq C\|\varphi\|$ ゆえ，$\{(T_{n'}{}^*\varphi)^*\}$ は B で弱点列コンパクトである．したがって，その中から弱収束する部分列: $(T_{n''}{}^*\varphi)^* \rightharpoonup h$ を選び出すことが出来る．

$\mathcal{T}$ が漸近的に同程度弱連続であり，$(T_{n''}{}^*\varphi)^*$ が h に弱収束するから，

$$(\varphi, T_{n''}[T_{n''}{}^*\varphi]^* - T_{n''}h) \to 0, \quad (n'' \to \infty)$$

を得る．ゆえに Cauchy の評価により，$n''_p > n'' \to \infty$ のとき

$$(\varphi, T_{n''}[T_{n''}{}^*\varphi]^* - T_{n''_p}[T_{n''_p}{}^*\varphi]^*) \to 0$$

が導かれる．よって，

$$(T_{n''}{}^*\varphi, [T_{n''}{}^*\varphi]^*) - (T_{n''_p}{}^*\varphi, [T_{n''_p}{}^*\varphi]^*) \to 0.$$

すなわち，

$$\|T_{n''}{}^*\varphi\| - \|T_{n''_p}{}^*\varphi\| \to 0, \qquad (n_p'' > n'' \to \infty). \tag{2.2}$$

よく知られた定理(第2章§1参照)により，$T_{n''}{}^*\varphi \rightharpoonup g$ および (2.2) 式から，$T_{n''}{}^*\varphi$ が g に強収束する[1]ことが示される．これで必要性は証明された．

2. 十分性. 帰謬法による．

1)〔訳注〕 これは誤りである．章末訳注の別証を見よ．

$f_k \rightrightarrows 0, \varphi \in B'^*$ が存在して,

$$|(\varphi, T_{n_{k'}} f_{k'})| > \alpha > 0$$

が成り立つものとする. ここで, $f_{k'}, T_{n_{k'}}$ はそれぞれ f_k, T_{n_k} の適当な部分列である. $\{T_{n_{k'}}{}^*\varphi\}$ はコンパクトゆえ, 適当な部分列 $\{T_{n_{k''}}{}^*\varphi\}$ が存在して,

$$T_{n_{k''}}{}^*\varphi \to g, \qquad (k'' \to \infty)$$

が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} |(\varphi, T_{n_{k''}} f_{k''})| &= |(T_{n_{k''}}{}^*\varphi, f_{k''})| \\ &\leqq \|T_{n_{k''}}{}^*\varphi - g\| \|f_{k''}\| + |(g, f_{k''})|. \end{aligned}$$

ここで, $\|f_{k''}\|$ が一様有界なことに注意すれば,

$$(\varphi, T_{n_{k''}} f_{k''}) \to 0$$

が成り立ち, 矛盾が生ずる. これで十分性が証明された.

§3 逆作用素の強収束に関する定理とその応用

先に述べた補題から直接に次の定理が導かれる.

定理 5.2 $\{T_n\}$ を共通の定義域 $D \subset B$ および, 値域 $R(T_n) = B'$ を持つ閉作用素の列とする. ここで B' は反射的 Banach 空間とする. さらに, $T_n g$ は任意の $g \in D$ に対し, Tg に弱収束し, $T_n{}^{-1}, [T_n{}^{-1}]^*$ が存在して, 列 $\{T_n{}^{-1}\}$, $\{[T_n{}^{-1}]^*\}$ は漸近的に同程度弱連続であると仮定する.

このとき, T^{-1} が存在して, $\bar{R} = \overline{TD}$ の上で有界であり, $T_n{}^{-1}$ は T^{-1} に $\bar{R}$ で強収束する.

証明 定理 5.1 から, T^{-1} が存在して $T_n{}^{-1}$ は $\bar{R}$ の上で T^{-1} に弱収束することが得られ, 補題 5.2 から, 実は, $T_n{}^{-1}$ は T^{-1} に強収束することが示される.

例 次の方程式を考察してみよう.

$$\begin{cases} L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}\right) - \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z^2} + \sin^2 \dfrac{z}{\varepsilon} c^2(x, y, z) u_\varepsilon(x, y, z) \\ \qquad = F(x, y, z) \\ u|_\Gamma = 0, \quad c^2 \geqq \alpha > 0, \quad c \in W_2{}^1 \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで Γ は凸曲面, Ω は Γ で囲まれた領域を表わす. われわれはこの方程式を $L_2[\Omega]$ で研究する. 明らかに, 作用素 L_ε は, $u|_\Gamma = 0$ なる函数の上で定義さ

れた作用素 $L_0=-\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+\dfrac{c^2(x,y,z)}{2}$ に弱収束する．以下，われわれは，定理5.2を使って(3.1)の解 u_ε が，$\varepsilon\to0$ のとき $L_0w=F(x,y,z),\ w|_\Gamma=0$ の解に強収束することを示す．

まず，L_ε^{-1} が存在して一様有界であることを示そう．実際，(3.1)に u_ε を掛け x,y,z に関して積分することにより，

$$\int\left\{\varepsilon\left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z}\right)^2\right\}dxdydz$$

$$+\int\sin^2\frac{z}{\varepsilon}c^2(x,y,z)u_\varepsilon^2dxdydz=\int Fu_\varepsilon dxdydz$$

$$\leqq\sqrt{\int F^2dxdydz}\sqrt{\int u_\varepsilon^2dxdydz}$$

を得る．ここで $\|u\|\leqq C\|\partial u/\partial z\|$ (Соболев[2]を参照せよ)に注意すれば，

$$\|u\|^2\leqq C\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|^2\leqq C\|F\|\,\|u\|$$

より，

$$\|u\|\leqq C\|F\|,\qquad\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|\leqq\sqrt{C}\,\|F\|$$

を得る．

次に $\{L_\varepsilon^{-1}\}$ が漸近的に同程度弱連続であることを示そう．そのためには，$F_n\rightharpoonup0$ ならば，

$$L_\varepsilon u_{\varepsilon n}=F_n,\qquad u_{\varepsilon n}|_\Gamma=0$$

の解 $u_{\varepsilon n}$ が $\varepsilon\to0,\ n\to\infty$ のとき0に弱収束することを示せばよい．$\varphi|_\Gamma=0$ なる滑らかな函数 φ を(3.1)に掛けて積分することにより次式を得る．

$$-\varepsilon\int\varphi(\Delta_2u_{\varepsilon n})dxdydz-\int\varphi\frac{\partial^2u_{\varepsilon n}}{\partial z^2}dxdydz$$

$$+\frac{1}{2}\int c^2\varphi u_{\varepsilon n}dxdydz-\frac{1}{2}\int c^2\cos\frac{2z}{\varepsilon}\varphi u_{\varepsilon n}dxdydz$$

$$=-\varepsilon\int(\Delta_2\varphi)u_{\varepsilon n}dxdydz-\int u_{\varepsilon n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{c^2}{2}\varphi\right)dxdydz$$

$$-\frac{1}{2}\int c^2\cos\frac{2z}{\varepsilon}\varphi u_{\varepsilon n}dxdydz$$

$$=\int\varphi F_ndxdydz.$$

ここで，n に関して一様に，$\varepsilon\to 0$ のとき，

$$-\varepsilon\int\Delta_2\varphi u_{\varepsilon n}dxdydz\to 0$$

$$\int c^2\cos\frac{2z}{\varepsilon}\varphi u_{\varepsilon n}dxdydz=-\frac{\varepsilon}{2}\int\sin\frac{2z}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}(u_{\varepsilon n}c^2\varphi)dxdydz\to 0$$

に注意すれば，われわれは，

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int u_{\varepsilon n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{c^2}{2}\varphi\right)dxdydz=0$$

を得る．ところが，Γ で 0 になる滑らかな函数全体を定義域とする作用素 $A=\partial^2/\partial z^2-c^2/2$ の随伴作用素は，自己共役作用素 $\partial^2/\partial z^2-c^2/2$ で 0 を固有値としないから，A の値域は稠密である．したがって，$u_{\varepsilon n}$ の一様有界性を用いれば，$u_{\varepsilon n}\rightrightarrows 0$ が示される．ゆえに定理5.2より，L_ε^{-1} が L_0^{-1} に強収束することが得られる．（証明終り．）

§4　弱収束する作用素の列の摂動論における正則化

摂動を受けた方程式の解が，適当な弱い位相で極限の方程式の解に収束することを示しうるような摂動論の問題に対しては，第1部の第1章(特に§3)で展開された正則化の方法が有用である．

われわれは，$L_2[\boldsymbol{R}^n]$で定義された線型作用素の族 L_ε で次の性質を持ったものを考察する．L_ε は共通の稠密な定義域を持ち，$(L_\varepsilon^{-1})^*$ が存在して，その定義域は $W_p^N[\rho^2]$を含み，$(L_\varepsilon^{-1})^*$ の $W_p^N[\rho^2]$への制限は $W_p^N[\rho^2]$から $L_2[\boldsymbol{R}^n]$への作用素として一様有界である．ここで，$W_p^N[\rho^2]$は，$\boldsymbol{R}^n$ の上の函数 g で，次の条件

$$\|g\|_{W_p^N[\rho^2]}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|D^Ng(x)|^p\rho^2(x)dx\right)^{1/p}<\infty,\quad \rho(x)\geqq 1 \text{ は連続}$$

を満たすものからなる Banach 空間である．

第1章の§3と同様にして次の 0)–4) の性質[1]をもつ非負函数 $G(y)$ を考えよう．

1)〔訳注〕　後の定理の証明にはさらに，次の条件が必要であろう．

$$\int G(\eta)\sum_{j=1}^n a_j\eta_j d\eta=0,\quad (a_j \text{ は定数}).$$

0) $\int_{-\infty}^{\infty} G(y)dy = 1.$

1) $\int_{-\infty}^{\infty} G(y)|y|^2 dy < \infty.$

2) $G(y) \in W_p^N[\rho^2].$

3) $|\xi|^{n+1}\rho^2(x-\xi)|D^N G(\xi)|^p \leqq C_0(x), \qquad |\xi| > 1.$

4) $A^{n/p}|D^N G(A\xi)|/D^N G(\xi) \leqq C_1, \qquad (A \to \infty).$

特に $\rho(x)$ が定数の場合は，3)，4) の条件を落とすことができる．

$L_2[\boldsymbol{R}^n]$ で作用素の列 $L_\varepsilon = A + \varepsilon B_\varepsilon$ と $f \in L_2[\boldsymbol{R}^n]$ に強収束する函数列 $\{f_\varepsilon\} \subset L_2[\boldsymbol{R}^n]$ を考えよう．以下 $\|f_\varepsilon - f\|_{L_2}$ を $\delta(\varepsilon)$ と表わすことにする．

定理 5.3 以下の 1)，2)，3) を仮定する．

1) L_ε^{-1} が存在する．

2) $A^{-1}f$ は 2 回連続微分可能かつ $\sup_{\substack{1 \leqq i, j \leqq n \\ 0 \leqq |\xi| < \infty}} \left| \frac{\partial^2 A^{-1} f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right| < \infty$ なる函数である．

3) $(A^{-1})^* B_\varepsilon^* (L_\varepsilon^{-1})^*$ および $(L_\varepsilon^{-1})^*$ は $W_p^N[\rho^2]$ から $L_2[\boldsymbol{R}^n]$ への作用素として一様有界である．すなわち，

$$\|(L_\varepsilon^{-1})^* g\|_{L_2} \leqq C_1 \|g\|_{W_p^N[\rho^2]}$$

$$\|(A^{-1})^* B_\varepsilon^* (L_\varepsilon^{-1})^* g\|_{L_2} \leqq C_2 \|g\|_{W_p^N[\rho^2]}.$$

このとき，次の不等式が成り立つ．

$$\left| \frac{1}{(\delta(\varepsilon)+\varepsilon)^{n\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{[\delta(\varepsilon)+\varepsilon]^\alpha} \right) L_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon(\xi) d\xi - A^{-1} f(x) \right| \leqq C(x)[\delta(\varepsilon)+\varepsilon]^{2\alpha}.$$

ここで $\alpha = (2+N+n/q)^{-1}$ $(1/p+1/q=1)$，$C(x)$ は ε には依存しない x の連続函数である．

証明 $\varphi \in W_p^N[\rho^2]$ に対して，

$$\begin{aligned}
&(\varphi, L_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon - A^{-1} f) \\
&= (\varphi, L_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon - L_\varepsilon^{-1}(A+\varepsilon B_\varepsilon) A^{-1} f) \\
&= ((L_\varepsilon^{-1})^* \varphi, f_\varepsilon) - ((A^{-1})^* (A+\varepsilon B_\varepsilon)^* (L_\varepsilon^{-1})^* \varphi, f) \\
&= ((L_\varepsilon^{-1})^* \varphi, f_\varepsilon - f) - \varepsilon((A^{-1})^* B_\varepsilon^* (L_\varepsilon^{-1})^* \varphi, f)
\end{aligned}$$

が成り立つから，仮定により，

$$|(\varphi, L_\varepsilon^{-1} f_\varepsilon - A^{-1} f)| \leqq C(\delta(\varepsilon)+\varepsilon)\|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]}$$

が得られる．ゆえに定理を示すには，次の補題を示せばよい．

補題 5.4　f_ε を $W_p^N[\rho^2]$ の上の線型汎函数で

$$(f_\varepsilon - f, \varphi)_{L_2} \leqq \varepsilon \|\varphi\|_{W_p^N[\rho^2]},$$

すなわち，$\|f_\varepsilon - f\|_{W_p\text{-}N} \leqq \varepsilon$ が成り立つものとする．ここで，$f(x)$ は2回連続微分可能かつ $\sup\limits_{\substack{0\leqq|\xi|<\infty \\ 1\leqq i,j\leqq n}} \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial\xi_i \partial\xi_j}\right| < \infty$ なる函数である．このとき任意の x に対して，次の式が成り立つ．

$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right) f_\varepsilon(\xi) d\xi + O(\varepsilon^{2\alpha}).$$

証明　まず，次の不等式

$$\left\|G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right)\right\|_{W_p^N[\rho^2]} \leqq \frac{C_3(x)}{\varepsilon^{\alpha(N-n/p)}} \tag{4.1}$$

が成り立つことを示そう．$\eta = (x-\xi)/\varepsilon^\alpha$ なる置換を行なうことにより，われわれは

$$\left\|G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right)\right\|_{W_p^N[\rho^2]}^p = \int_{-\infty}^{\infty} \left|D^N G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right)\right|^p \rho^2(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{\alpha(Np-n)}} \int_{-\infty}^{\infty} |D^N G(\eta)|^p \rho^2(x-\eta\varepsilon^\alpha) d\eta$$

を得る．ここで積分範囲を二つに分けよう．

$$I_1(\varepsilon^\alpha, x) = \int_{|\eta|\geqq\varepsilon^{-\alpha}} |D^N G(\eta)|^p \rho^2(x-\eta\varepsilon^\alpha) d\eta,$$

$$I_2(\varepsilon^\alpha, x) = \int_{|\eta|\leqq\varepsilon^{-\alpha}} |D^N G(\eta)|^p \rho^2(x-\eta\varepsilon^\alpha) d\eta.$$

I_2 に関しては，

$$I_2 \leqq \max_{|\xi|\leqq 1} \rho^2(x-\xi) \int_{|\eta|\leqq\varepsilon^{-\alpha}} |D^N G(\eta)|^p d\eta$$

$$\leqq \max_{|\xi|\leqq 1} \rho^2(x-\xi) \|G(\xi)\|^p{}_{W_p^N[\rho^2]}.$$

I_1 に関しては，

$$I_1 \leqq \int_{|\eta|\geqq\varepsilon^{-\alpha}} |C_1 \varepsilon^{\alpha n/p} D^N G(\eta\varepsilon^\alpha)|^p \rho^2(x-\eta\varepsilon^\alpha)(|\eta|\varepsilon^\alpha)^{n+1} \varepsilon^{-\alpha(n+1)} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+1}}$$

$$\leqq \frac{C_0(x) C_1{}^p}{\varepsilon^\alpha} \int_{|\eta|\geqq\varepsilon^{-\alpha}} \frac{d\eta}{|\eta|^{n+1}} \leqq C_2(x).$$

ゆえに，(4.1)が証明された．

次に，

$$\int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right)(x-\xi)^2 d\xi = \varepsilon^{\alpha(n+2)} \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta)\eta^2 d\eta = C\varepsilon^{\alpha(n+2)} \qquad (4.2)$$

が成り立つことに注意すれば，

$$f_{\varepsilon}{}^{\alpha}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \int G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) f_{\varepsilon}(\xi) d\xi$$

$$M = \frac{1}{2} \max_{\substack{1 \leqq i, j \leqq n \\ 0 \leqq |\xi| \leqq \infty}} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|$$

として次式を得る[1)].

$$\begin{aligned} |f(x)-f_{\varepsilon}{}^{\alpha}(x)| &\leqq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right)(f(x)-f(\xi)) d\xi \right| \right. \\ &\qquad \left. + \int G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) |f(\xi)-f_{\varepsilon}(\xi)| d\xi \right\} \\ &\leqq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \left\{ M \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right)(x-\xi)^2 d\xi + \varepsilon \left\| G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right\|_{W_p^N[\rho^2]} \right\} \\ &\leqq C\varepsilon^{2\alpha} + C_3(x)\varepsilon^{[1-\alpha(N+n/q)]}. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

ここで，$\alpha=(2+N+n/q)^{-1}$ とおけば

$$|f(x)-f_{\varepsilon}{}^{\alpha}(x)| \leqq C(x)\varepsilon^{2\alpha}, \qquad f_{\varepsilon}{}^{\alpha} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \int G\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) f_{\varepsilon}(\xi) d\xi$$

が得られる．（証明終り．）

この定理は，ある種のパラメーターつきの微分積分方程式，たとえば Тихонов の適切でない問題の正則化の理論に現われる方程式に対して応用することができる．さらに，方程式 $Tu=f$ において，$(T^{-1})^*$ が存在して $W_p^N[\rho^2]$から L_2 への有界作用素になる場合，この定理を $B_{\varepsilon}=0$ として適用することができる．補題を用いてこの章で与えた解の弱収束または強収束を改良することができる．たとえば

$$\|f_k-f\|_{L_2} = \sigma_k \to 0, \qquad (k \to \infty), \qquad f(x) \in C^2$$

ならば，

$$\left| f(x) - \frac{1}{\sigma_k{}^{2n/(4+n)}} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{x-\xi}{\sigma_k{}^{2/(4+n)}}\right) f_k(\xi) d\xi \right| \leqq \sigma_k{}^{4/(4+n)}.$$

---

1)〔訳注〕 前述(88 頁注)のように，ここで $\int G(\eta) \sum_{j=1}^{n} a_j \eta_j d\eta = 0$ が必要であろう．

〔訳注〕 **補題 5.2 の必要性**

$\{T_n{}^*\varphi\}$ が相対コンパクトでないような $\varphi\in B'^*$ が存在すると仮定するならば,

$$\|T_{n_k}{}^*\varphi-T_{n_j}{}^*\varphi\|\geqq\varepsilon_0,\qquad(j\neq k)\qquad(*)$$

なる部分列 $\{T_{n_j}\}$ および $\varepsilon_0>0$ が存在する. B の元の列 $\{f_k\}$ で条件:

$$(f_k,\ T_{n_j}{}^*\varphi)=0,\qquad(j<k),$$
$$(f_k,\ T_{n_k}{}^*\varphi)=\|T_{n_k}{}^*\varphi\|^2,$$
$$\|f_k\|=\|T_{n_k}{}^*\varphi\|$$

を満たすものを選ぼう. そのとき $\|f_k\|\leqq c$ ゆえ, f_k の適当な部分列 $f_{k'}$ は f に弱収束するが,

$$(f,\ T_{n_j}{}^*\varphi)=\lim_{k'\to\infty}(f_{k'},\ T_{n_j}{}^*\varphi)=0$$

に注意するならば,

$$\lim_{k'\to\infty}\|T_{n_{k'}}{}^*\varphi\|^2=\lim_{k'\to\infty}[\|T_{n_{k'}}{}^*\varphi\|^2-(f,\ T_{n_{k'}}{}^*\varphi)]=\lim_{k'\to\infty}(f_{k'}-f,\ T_{n_{k'}}{}^*\varphi)=0.$$

これは, (*)に矛盾する. (証明終り.)

第2部　作用素係数の微分方程式論における特性帯の大域理論と漸近的方法

第1章　問題の設定

§1　量子力学の方程式の特性帯

量子力学の方程式は偏微分方程式論の中で，まだそれにふさわしい地位を占めていない．双曲型波動方程式が光子の波動性を記述するのとちょうど同じように，量子力学の方程式は素粒子の波動性を記述している．

光の波動性は電子の波動性に比べてかなり早く発見された．数学的文献の上でも波動方程式はすでに早くから研究されて来た．この方程式の性質をもとにして偏微分方程式の重要なクラスの一つ——双曲系——が定義された．ところが Schrödinger 方程式の方は一般に双曲型にも，楕円型にも，放物型にも属さず，ただ Петровский の意味で適切[1]というだけであり，こうした見方からすれば何か偏った特例のようにも思える．しかしながら量子物理的観点からすれば波動方程式は光子という質量ゼロの粒子を記述しているのであって，これこそ極限的な特例なのである．われわれは以下波動方程式や Maxwell 方程式をこのような観点から扱うことにする．

量子力学の方程式に対してはこれをいかなる函数空間で考察するかが物理的観点から本質的である．われわれは以下方程式の分類として，それに添えられた函数空間をも考慮したものを導入する．函数空間として連続函数の空間を採れば，この分類は通常のものと一致する．

波動光学と幾何光学の間の物理的対応には双曲型方程式の特性帯や陪特性帯などの深遠な数学的概念が関係している．だが，量子力学の方程式から陪特性帯や特性帯を〔普通の意味での最高階の部分を用いて〕形式的に作ってみても，それらは古典力学の軌道や定作用曲面とは一致しない．一方，物理学者は実際的に Schrödinger 方程式の陪特性帯として，対応する Hamilton 方程式の解を

1)〔訳注〕　初期値問題の特性根の虚部が有界なものをこうよぶ．

用いている.

量子力学の方程式に対して特別な問題設定を試みることにより，通常の特性帯の概念が一般化されるのが見られるであろう.

1° いくつかの具体的問題の解における不連続性の伝播

1. よく知られているように，双曲系に対する特性帯の概念は，次のような不連続性伝播の問題を経由して到達される：双曲系に何らかの一般化された意味での不連続な解 $u(x,t)$ が存在するとする.（一般にはもとの方程式の解とはならない）函数 $\varphi(x,t)$ で，差 $u(x,t)-\varphi(x,t)$ が十分滑らかとなるようなものを構成的に与えることが要求される．函数 $\varphi(x,t)$ は不連続性のふるまいを特徴づける(Courant[1]).

十分小さな t に対しては函数 $\varphi(x,t)$ の構成は，特性方程式の解を見出すというより易しい問題に帰着することが知られている.

例として波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2(x,t)\Delta u,\qquad c^2(x,t)\neq 0,\qquad x=(x_1,\cdots,x_n)\tag{1.1}$$

を考察する．ここに $u(x,t)$ は不連続[1]な初期値

$$u(x,0)=\varphi(x)f^+(x),\qquad u_t'(x,0)=0\tag{1.1 a}$$

を満たす．$f^+(x)$ は $f(x)>0$ のとき $f^+(x)=f(x)$, $f(x)<0$ のとき $f^+(x)=0$ で定義される函数である．函数 $\varphi(x)$, $f(x)$, $c(x,t)$ はすべて十分滑らかとし，$\varphi(x)$ はコンパクトな台 Ω をもつとする．(1.1)に対する特性方程式は

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2=c^2(x,t)(\nabla S)^2$$

となる．$S(x,0)=f(x)$ とおこう．特性方程式の解の分枝を一つ決めるために次のようなデータを与える.

$$\left.\frac{\partial S_\nu}{\partial t}\right|_{t=0}=(-1)^\nu c(x,0)|\nabla S_\nu(x,t)|_{t=0}=(-1)^\nu c(x,0)|\mathrm{grad}\, f(x)|$$

一般に特性方程式の解のこれら二つの分枝

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial t}=(-1)^\nu H(x,\nabla S_\nu,t),\qquad (\nu=1,2)$$

$$H(x,p,t)=c(x,t)|p|,\qquad p=(p_1,\cdots,p_n)$$

---

1) ここで考察されるのは弱い不連続性，すなわち導函数の不連続性である.

には二つの陪特性方程式系

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_i{}^\nu &= (-1)^\nu \frac{\partial H(x^\nu, p^\nu, t)}{\partial x_i{}^\nu}, \\
\dot{x}_i{}^\nu &= (-1)^{\nu+1} \frac{\partial H(x^\nu, p^\nu, t)}{\partial p_i{}^\nu}, \qquad (i = 1, \cdots, n) \\
\frac{ds_\nu}{dt} &= (-1)^\nu (H(x^\nu, p^\nu, t) - \sum_i p_i{}^\nu H_{p_i{}^\nu}(x^\nu, p^\nu, t)) = 0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

の解 $p^\nu(t), x^\nu(t)$ $(\nu=1, 2)$ で，初期条件

$$x^\nu(0) = x_0, \qquad p^\nu(0) = \nabla f(x_0), \qquad x_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0n}) \in \Omega$$

を満たすものがそれぞれ対応する．ここに Ω は $\varphi(x)$ の台である．

$$x^\nu(t) = X^\nu(t, x_0), \qquad p^\nu(t) = P^\nu(t, x_0)$$

と書くことにする．十分小さい $t \leqq t_0$ に対し曲線 $X^\nu(t, x_0)$ は $x_0 \in \Omega$ を動かすとき各 ν について n-パラメーター族を成す．しかも

$$Y^\nu(t, x_0) = \det \left\| \frac{\partial X_k{}^\nu(t, x_0)}{\partial x_{0j}} \right\| > 0$$

であることが $Y^\nu(0, x_0)=1$ よりわかる．ゆえに方程式

$$X^\nu(t, x_0) = x, \qquad (x_0 \in \Omega)$$

は各 $|t| \leqq t_0$ について高々一つの解 $x_0{}^\nu(x, t)$ をもつ．

容易にわかるように，もとの問題の解 $u(x, t)$ は，次の初期条件を満たす波動方程式の二つの解の二分和 $u(x, t)=(u_1(x, t)+u_2(x, t))/2$ の形に表わされる．

$$
\begin{aligned}
&u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x) f^+(x) \\
&\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = -\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = c(x, 0) |\mathrm{grad}\ f(x)| \varphi(x) \theta(f(x)).
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

ここに $\xi<0$ のとき $\theta(\xi)=0$, $\xi>0$ のとき $\theta(\xi)=1$ である．各解 $u_\nu(x, t)$ $(\nu=1, 2)$ は，以下に知られるように特性方程式の解のそれぞれの分枝 $S_\nu(x, t)$ に対応している．

以上に述べられた仮定のもとに次の命題が成り立つ(Courant[1])[1]．

問題(1.1)-(1.3)の解 $u_\nu(x, t)$ $(\nu=1, 2)$ は次の形に表わされる．

$$u_\nu(x, t) = \frac{c(x, t)}{c(x_0{}^\nu(x, t), t)} \frac{\varphi(x_0{}^\nu(x, t))}{\sqrt{Y^\nu(t, x_0{}^\nu(x, t))}} f^+(x_0{}^\nu(x, t)) + F^\nu(x, t) \ (\nu = 1, 2)$$

1)〔訳注〕 同書 pp. 633–635 に従って計算する．なおこの公式は第5章の例で再び現われる．そこでの計算でもわかるように因子 $[H(x_0{}^\nu, \nabla f, 0)/H(x, P^\nu, t)]^{3/2}$ が足りない．H が(すなわち c が)t に依らなければこのままでよい．

ここに $F^{\nu}(x,t)$ は連続的微分可能な函数である.

系　問題(1.1)-(1.1a)の解は $u(x,t)=(u_1(x,t)+u_2(x,t))/2$ の形に表わされるから，$u(x,t)$ は二つの領域 $\Omega_t{}^{\nu}=X^{\nu}(t,\Omega)(\nu=1,2)$ の和集合の外では連続的微分可能である．何となれば，$x\notin\Omega_t{}^{\nu}$ ならば $x_0{}^{\nu}\notin\Omega$，したがって $\varphi(x_0{}^{\nu})=0$ となるからである.

2. 今度は混合問題を考えよう．$u(x,y,t)$ は4階の方程式

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^4 u}{\partial x_i{}^2\partial y^2}+a(x,y,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial y^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i{}^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i{}^2}=0$$

と境界条件

$$u|_{y=0}=u|_{y=\pi}=0$$

および不連続な初期条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x)f^{+}(x)\sin y$$
$$u'|_{t=0}=0$$

を満たすとする．ここに φ は台が有界で滑らかとする．もし係数 $a(x,y,t)=c(x,t)$ が y に依存していなければ変数分離法を適用することができる．すなわち，$u(x,y,t)=v(x,t)\sin y$ とおけば

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i{}^2}(1+b_i{}^2(x,t))-c(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_1}$$

なる方程式が得られ，この特性帯は次の方程式を満たす.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2(1+b_i{}^2(x,t)) \tag{1.4}$$

$a(x,y,t)$ が y に依存していれば，もちろんこのようなことはできないが，その場合でも解 $u(x,y,t)$ の不連続性の伝播は方程式(1.4)の解で規定されることが後で明らかになる．ゆえにわれわれはそれを特性帯とよぶことにする[1)].

われわれは第4章において十分広いクラスの問題に対し解の不連続性伝播を決定する一般的な公式を与えるが，それによれば，いまの問題の解は次のように表わされる[2)].

---

1)　通常の特性方程式は4階の偏導函数を含む項だけで定義されることを思い起こそう.

2)〔訳注〕　定理4.2，局所的には定理6.2で間に合う．$[0,\pi]$ 上の C^2 級函数で Dirichlet 境界条件を満たすものの空間を $C_0{}^2[0,\pi]$ と書くとき $B^{\infty}=L_2[\boldsymbol{R}_{\xi}]\hat{\otimes}C_0{}^2[0,\pi]$，$B^1=L_2[\boldsymbol{R}_{\xi}]\hat{\otimes}L_2[0,\pi]$，$A=-i\partial/\partial\xi$ ととればよい．これに対応して初期条件は $\varphi(x)\exp(f(x)\partial/\partial\xi)\xi^{+}\sin y$ となる．$L=\left(p^2+\frac{i}{A}ap_1\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+p_{n+1}{}^2-\sum b_i{}^2p_i{}^2$ であり，$\sin y$ は固有値問題 $L_0\chi=\lambda\chi$ の $\lambda=p_{n+1}{}^2-p^2-\sum b_i{}^2p_i{}^2$〔次頁へ〕

$$u=\frac{1}{2}(u_+(x,y,t)+u_-(x,y,t))$$

$$u_\pm=2H_\pm(x,P_\pm(t,x_0{}^\pm),t)\varphi(x_0{}^\pm)\left|\frac{\partial x_0{}^\pm}{\partial x}\right|^{1/2}\sin y$$

$$\times\exp\left\{\int_0^t dt\frac{P_{\pm 1}(t,x_0{}^\pm)}{2H_\pm(x,P_\pm(t,x_0{}^\pm),t)}\int_0^\pi\frac{2}{\pi}\sin^2 y\cdot a(x,y,t)dy\right\}f^+(x_0{}^\pm)$$

$$+F(x,y,t)$$

ここに

$$H_\pm(x,p,t)=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^n(1+b_i{}^2(x,t))p_i{}^2}$$

であり，$X_\pm(t,x_0)$, $P_\pm(t,x_0)$ は Hamilton 系

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H_\pm}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H_\pm}{\partial x_i}\qquad(i=1,\cdots,n)$$

$$x(0)=x_0,\qquad p(0)=\nabla f(x_0)$$

の解，また $x_0{}^\pm=x_0{}^\pm(x,t)$ は方程式 $X_\pm(t,x_0)=x$ の解で $F(x,y,t)$ は連続的微分可能な函数である．

3. 不連続性が通常の特性帯に沿っては伝播しないもう一つの例を考察する．$u(x,y,z,t)$ を次の問題の解とする．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(1+tz^2)\frac{\partial u}{\partial x}+z^2\frac{\partial u}{\partial y}+xz^4u=\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial y}$$

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x)\theta(y)e^{-z^2/4}$$

$\varphi(x)$ は台が有界で無限回微分可能な函数である．後に知られるようにこの場合には解 $u(x,y,t)$ は次のように表わされる[1]．

$$u(x,y,z,t)=\varphi\left(x-t-\frac{t^2}{4}\right)\theta(y+t)\exp\left\{-\frac{z^2}{4}+\sqrt{3\pi}\left(xt-\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{6}\right)\right\}$$

$$+F(x,y,z,t).$$

ここに $F(x,y,z,t)$ は連続函数である．ここでは不連続性は方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial x}+\sqrt{t\frac{\partial S}{\partial x}+1}=0$$

に対応する固有函数，なおこの例は $u_\pm$ を特異函数 $\xi^{+l}/l!$ と $\sin my$ の 2 重級数に展開したときの初項として前例と同様の初等的計算でも出せる．いずれにしても因子 $2H_\pm$ は奇妙で，訳者の計算では $\sqrt{H_\pm(x_0{}^\pm,\nabla f,0)/H_\pm(x,p_\pm,t)}\cdot\exp\left\{\int_0^t\sum_{i=1}^n b_i(\partial b_i/\partial x_i)P_{\pm i}/H_\pm dt\right\}$が出てきた．

1)〔訳注〕 この例は訳者には理解できなかった．

によって定まる曲面に沿って伝播しており，これをこの場合の特性帯とみなすのが自然である．

4. 同様の問題はもっと一般の方程式に対し，函数の差 $u(x,t)-\varphi(x,t)$ に対する要請をいくらか変えて設定することが可能である．この差が，ある階数までの導函数も込めて(必ずしも連続函数の空間とは限らぬ)ある Banach 空間 B に属することを要請してみよう．方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2(x,t)\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0, \qquad a^2(x,t)+b^2(x,t)\neq 0 \quad (1.5)$$

に対する初期値問題

$$\begin{aligned} u(x,y,0)&=\varphi(x)\delta(y-y_0)\\ u_t'(x,y,0)&=0 \end{aligned} \qquad (1.5\,\mathrm{a})$$

の解 $u(x,y,t)$ を考えよう．方程式の係数は十分滑らかで $\varphi(x)$ はコンパクトな台 Ω をもつ滑らかな函数とする．函数 $\varphi(x,y,t)$ で差 $u(x,y,t)-\varphi(x,y,t)$ が $L_2[\boldsymbol{R}^2]$ に属するようなものを見出すのが問題である($\boldsymbol{R}^n$ は n 次元 Euclid 空間を表わす)．われわれは後にこの種の函数 $\varphi(x,y,t)$ が方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\left[a^2(x,t)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+b^2(x,t)\right]^{1/2}$$

の解を用いて構成されることを知る[1]．これがこの場合の特性帯である．(特性帯の一般的定義は後に〔本章§3で〕与えられる．)これに対応する Hamilton 系は

$$\dot{x}=-\frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p}=\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad H=\sqrt{a^2p^2+b^2}$$

$$\frac{ds}{dt}=[H-pH_p]$$

であり，初期条件

$$x(0)=x_0, \qquad p(0)=0, \qquad s(0)=0$$

のもとに解 $x(t), p(t), s(t)$ は十分小さい $|t|\leqq t_0$ に対して1パラメーター族を成す．

以前の記号

1)〔訳注〕 一般論で $A=-\partial^2/\partial y^2$ととる．初等的には y につき部分 Fourier 変換して $u(x,\eta,t)\sim \exp\{i\eta^2S(x,t)-i\eta y_0\}\left\{\varphi(x,t)+O\left(\frac{1}{\eta^2}\right)\right\}$ の形の漸近解を求めればよい．次頁の結果は訳者の計算と少し違っている．

$$x(t) = X(t, x_0), \quad p(t) = P(t, x_0), \quad s(t) = S(t, x_0)$$

を踏襲する．十分小さい $|t| \leqq t_0$ に対し，導函数

$$Y(t, x_0) = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} > 0$$

であり，方程式 $X(t, x_0) = x$ の解 $x_0 = x_0(x, t)$ は一意である．次の命題が成り立つ：

問題(1.5)，(1.5 a)の解 $u(x, y, t)$ は $0 \leqq t \leqq t_0$ において

$$u(x, y, t) = \frac{\varphi(x_0)\cos\dfrac{(y-y_0)^2}{2S(t, x_0)}}{\sqrt{S(t, x_0)Y(t, x_0)}} + F(x, y, t)$$

の形に表わされる．ここに $x_0 = x_0(x, t)$ であり，また各 t を固定するごとに $F(x, y, t) \in L_2[\boldsymbol{R}^2]$ である．

系 $\Omega_t = X(t, \Omega) \times \{-\infty \leqq y \leqq \infty\}$ とする．問題(1.5)-(1.5 a)の解を $\boldsymbol{R}^2 \backslash \Omega_t$ に制限したものは $L_2[\boldsymbol{R}^2 \backslash \Omega_t]$ に属する．

5. 非相対論的量子力学の基礎方程式，すなわち Schrödinger の方程式は

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi + v(x, t)\psi, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \tag{1.6}$$

の形をしている．ここに h は Planck 定数[1)]，μ は粒子の質量で，ともに定数である．

$\psi(x, t)$ は初期条件

$$\psi(x, 0) = \delta(x - x_0) \tag{1.7}$$

を満たすとしよう．もし $v(x, t)$ が有界かつ無限回微分可能 $(v(x, t) \in C^\infty)$ ならば，解 $\psi(x, t)$ は任意の時刻 $t > 0$ において x につき無限回微分可能である．しかし解 $\psi(x, t)$ およびその x に関する導函数たちは，t を止めたとき $L_2[\boldsymbol{R}^n]$ には属さない．ゆえに差 $\psi(x, t) - \psi_0(x, t)$ が $L_2[\boldsymbol{R}^n]$ において微分可能となるような函数 $\psi_0(x, t)$ を見出す問題は自明でない．

われわれは差 $\psi(x, t) - \psi_0(x, t)$ にさらにきびしい制限を付ける．先走りして注意するならば，Schrödinger 方程式の解のパラメーター h に対する依存性が重要であり，そのため ψ を x と t のみならず h の函数とも見て $\psi = \psi(x, t, h)$ と書く．解 ψ は t を止めるごとに次のノルムを有限にする函数 $F(x, h)$ の空間

---

1)〔訳注〕 正確には Planck 定数の $1/2\pi$ で通常 $\hbar$ と書かれる．

$L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}]$に属するとしよう．

$$\left\{\int_0^1 dh\int |F(x,h)|^2 dx\right\}^{1/2}. \tag{1.8}$$

以前のように $\varphi(x)\in C^\infty$ は有界な台 Ω を持ち，また $f(x)\in C^\infty$ とする．次の形の函数

$$F(x,h)=\varphi(x)\exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\} \tag{1.9}$$

は $L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}]$で微分できない．初期条件

$$\psi(x,0,h)=F(x,h) \tag{1.10}$$

を満たす方程式(1.6)の解も $t>0$ においてやはり $L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}]$で微分できない．

ゆえに差 $\psi-\psi_0$ が $L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}]$で微分可能となるような函数 $\psi_0(x,t,h)$ を構成する問題が立てられる．$\psi_0(x,t,h)$ を構成するために，Hamilton–Jacobi の方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2\mu}(\nabla S)^2+v(x,t)=0$$

が用いられる．この特性帯は Hamilton 系

$$\mu\dot{x}=p,\qquad \dot{p}=-\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{ds}{dt}=\frac{p^2}{2\mu}-v(x,t) \tag{1.11}$$

の解である．初期条件

$$x(0)=x_0,\qquad p(0)=\nabla f(x_0),\qquad s(0)=f(x_0)$$

を与え，これに対する解を以前のように

$$x(t)=X(t,x_0),\qquad p(t)=P(t,x_0),\qquad s(t)=S(t,x_0)$$

と記そう．$t\leqq t_0$ においては $x_0\in\operatorname{supp}\varphi(x_0)=\Omega$ に対する方程式 $X(t,x_0)=x$ の解 $x_0=x_0(x,t)$ は一意的で，Jacobi 行列式

$$Y(t,x_0)=\det\left\|\frac{\partial X_i(t,x_0)}{\partial x_{0j}}\right\|$$

は 0 と異なる．次の命題が成り立つ：

問題(1.6), (1.9), (1.10)の解は次の形に表わされる．

$$\psi(x,t,h)=\frac{\varphi(x_0(x,t))}{\sqrt{|Y(t,x_0(x,t))|}}\exp\left\{\frac{i}{h}S(t,x_0(x,t))\right\}+\Phi(x,t,h). \tag{1.12}$$

ここに，$\Phi(x,t,h)$, $\dfrac{1}{h}\Phi(x,t,h)$ および $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x,t,h)$ $(i=1,\cdots,n)$ は $L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}]$

に属する.

$L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}]$において掛け算作用素$1/h$は非有界であり，ある意味で作用素$\partial/\partial x$と同等であることに注意しよう.

系　問題(1.6),(1.9)の解は領域$X(t,\Omega)$の外で$L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash X(t,\Omega)\times\{0\leqq h\leqq 1\}]$において微分可能である.

今度はxにつき2乗可積分でhについては($0\leqq h\leqq 1$で)連続な函数の空間$G[\boldsymbol{R}^{n+1}]$を考えよう. $g\in G[\boldsymbol{R}^{n+1}]$に対するノルムを

$$\max_{0\leqq h\leqq 1}\sqrt{\int |g(x,h)|^2 dx}$$

と定める. 公式(1.12)における函数$\Phi(x,t,h)$は，それ自身および$\dfrac{1}{h}\Phi(x,t,h)$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x,t,h)$ $(i=1,\cdots,n)$が$G[\boldsymbol{R}^{n+1}]$に属するようなものであることがわかる.

2° 作用素係数の方程式に対する拡張された‘不連続性伝播’の問題

Hilbert空間Hに値を持つ函数$u(t)$は発展方程式

$$\frac{du(t)}{dt}=Au(t) \tag{1.13}$$

を満たすとする. ここにAは任意の自然数Nに対し定義域$D(A^N)$および$D(A^{*N})$がHにおいて稠密であるようなH上の非有界作用素である.

$$u(t)\notin D(A^2) \tag{1.14}$$

を仮定しよう. 双曲型方程式の解の不連続性伝播の問題のアナロジーというのは，函数$u_N(t)$を

$$u(t)-u_N(t)\in D(A^N) \tag{1.15}$$

となるように構成することである.

方程式(1.13)の広義の解とは集合$D(A^{*N})$上の汎函数(一般函数あるいは超函数) $W(t)=A^N u(t)$のこととする. すなわち，$u(t)$は(1.13)の普通の解であって，任意の$g\in D(A^{*N})$に対して

$$(W(t),g)=(u(t),A^{*N}g)$$

が成り立っている. 明らかに$A^N u_N(t)$もまた$D(A^{*N})$上の汎函数であって，(1.15)より

$$W(t)-A^N u_N(t)\in H$$

となる.

そこで $W(t)$ を $D(A^{*N})$ 上の汎函数として定義された方程式(1.13)の広義の解としよう．$W(t)$ の‘特異部分’を分離する問題は次のように述べられる：一般函数 $W_0(t)$ を差 $W(t)-W_0(t)$ が H に属するように構成すること．

明らかに，一般性を損なうことなく問題(1.13)-(1.15)の考察を方程式(1.13)の古典的な解 $u(t)\in D(A)$ に限ることができる．広義の問題に移行するには等式の両辺に作用素 A の適当な冪を施せばよい．$-iA$ が自己共役作用素のときには E_λ をそのスペクトル函数とすれば明らかに

$$
\begin{aligned}
u(t) &= e^{At}u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}dE_\lambda u(0) \\
&= \int_{\lambda_0}^{\infty} e^{i\lambda t}dE_\lambda u(0) + \int_{-\infty}^{-\lambda_0} e^{i\lambda t}dE_\lambda u(0) + \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} e^{i\lambda t}dE_\lambda u(0)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．最後の項は有限な λ_0 に対して常に $D(A^N)$ に属するから

$$
u(t) - \int_{\lambda_0}^{\infty} [e^{i\lambda t}dE_\lambda - e^{-i\lambda t}dE_{-\lambda}]u(0) \in D(A^N).
$$

つまり，この問題は E_λ の $|\lambda|\to\infty$ のときの漸近的挙動の問題と関係しているのである．

3° 2階の方程式の分類

方程式(1.1)，(1.5)および(1.6)の解の一般的性質をもととして Hilbert 空間における作用素係数の方程式の広いクラスを分類することができる．ここでは最も簡単でしかも量子力学のすべての方程式を包含する場合を考察する．

Hilbert 空間 H に値をもつ $x=(x_1, \cdots, x_n)$，t の函数のベクトル $\psi(x,t)=(\psi_1(x,t), \cdots, \psi_s(x,t))$ を考える．$B_i(x,t)(i=1, \cdots, n)$ および $R(x,t)$ をパラメーター x, t につき有界で無限回微分可能な $s\times s$ 型行列とする．$a_k(x,t)\ (k=1,2,3)$，$b(x,t)=(b_1(x,t), \cdots, b_n(x,t))$ を x, t の無限回微分可能な実数値函数およびベクトルとする．A を Hilbert 空間 H 上の自己共役作用素とする．これは x, t には依存しない．s 次元ベクトル空間を $\boldsymbol{R}^s$ で表わすことにする．

われわれが考察する方程式は次のものである．

$$
\begin{aligned}
\Big[a_1(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + iAa_2(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + A^2a_3(x,t) + (\nabla + iAb(x,t))^2 \\
+ \sum_{k=1}^{n} B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} + iAR(x,t)\Big]\psi(x,t) = 0
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

$\psi=e^{iAS(x,t)}$ を代入して A^2 の係数をゼロに等しいとおけば

$$a_1(x,t)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+a_2(x,t)\frac{\partial S}{\partial t}-a_3(x,t)+(\nabla S+b(x,t))^2=0 \quad (1.17)$$

なる方程式を得るが，われわれはこれを特性方程式とよぶことにする．（この方程式は作用素 A が作用素 $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ と同権という立場からも導ける．）特性多項式

$$Q(p_0)=a_1p_0{}^2+a_2p_0-a_3+\sum_{i=1}^{n}(p_i+b_i)^2 \quad (1.18)$$

の根が各 $p_1,\cdots,p_n,x$ に対しすべて実数のとき方程式(1.16)を波動型，すべて純虚数のときトンネル型，またある領域では実数で残りの領域では純虚数のときには混合型とよぶことにしよう．これ以外の型の方程式はわれわれの考察の対象にしない．

4° 抽象的函数に対する Fourier 型の変換

1. いわゆる運動量表現(p-表現)を定義しよう．作用素 A が非負定値のときには運動量表現への変換は次の形をしたユニタリ作用素 $\Phi_A{}^{x_n}$ を用いて遂行される[1)].

$$\tilde{\psi}(p)=\Phi_A{}^{x_n}\psi(x)=\frac{A^{n/2}}{(2\pi i)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipxA}\psi(x)dx. \quad (1.19)$$

逆変換は

$$\psi(x)=\Phi_A{}^{p_n}\tilde{\psi}(p)=\frac{A^{n/2}}{(-2\pi i)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipxA}\tilde{\psi}(p)dp. \quad (1.20)$$

また $-A$ が非負定値のときは

$$\psi(x)=\Phi_A{}^{p_n}\tilde{\psi}(p)=\frac{(-A)^{n/2}}{(2\pi i)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipxA}\tilde{\psi}(p)dp \quad (1.21)$$

等と定める．A が定符号でないときには空間 H を二つの部分空間の和 $H=H^++H^-$ に分け H^+ への A の制限 A^+ は非負定値で，H^- への $-A$ の制限 $-A^-$ は非負定値であるようにする．$\tilde{\psi}(p)$ を H に値をもつ函数とし

$$\tilde{\psi}(p)=\tilde{\psi}^+(p)+\tilde{\psi}^-(p);\qquad \tilde{\psi}^+(p)\in H^+,\quad \tilde{\psi}^-(p)\in H^-$$

とおく．このとき

$$\Phi_A{}^{p_n}\tilde{\psi}(p)=\Phi_{A^+}{}^{p_n}\tilde{\psi}^+(p)+\Phi_{A^-}{}^{p_n}\tilde{\psi}^-(p) \quad (1.22)$$

---

1)〔訳注〕 変な記号だが $\Phi_A{}^{x_n}$ の x_n は x につき n 個の変数の変換であることを意味し，第 n 座標とは何の関係もない．したがって次の積分も n 重である．

と定める．$\Phi_A{}^{x_n}$ の定義も同様である．

2. 今度は Banach 空間 B に値をもつ x の函数の空間に働く同様の作用素を導入しよう．Banach 空間 B において稠密な定義域 $D(A)$ と逆をもった作用素 A を考える．$\varepsilon>0$ あるいは ε が純虚数のとき $(1+\varepsilon A)^{-1}$ は存在し，かつ B 上いたるところで定義され $\|(1+\varepsilon A)^{-1}\|\leqq 1$ を満たすとする．$D(A)$ 上で定義された作用素

$$T=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-i\pi/4}A\int_0^\infty \exp(iAx^2)dx$$

を考える．この作用素は次の性質を持つ(第6章§1を見よ)：a) $T^2=A$ が $D(A)$ の上で成り立つ．b) 複素共役作用素 $\bar{T}$ を

$$\bar{T}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{i\pi/4}A\int_0^\infty \exp(-iAx^2)dx$$

で定めるとき $T=\bar{T}$ が成り立つ．ゆえに作用素 T は実 Banach 空間において適切に定まる．$T=\sqrt{A}$ とおいて B に値をもつ函数に対する Fourier 型の変換を公式(1.19)-(1.20)により定義する[1)]．

$-A$ が上述の性質を持つ場合も考えることができる．このときには Fourier 型の変換として公式(1.21)を用いる．

〔**原注**〕 ここで反転公式を証明しておこう．たとえば $n=1$ のとき，有界な台 Ω を持ち $D(d/d\xi, A)$ に属する函数 $\varphi(\xi)$ に対しては

$$\begin{aligned}
A\Phi_A{}^x\Phi_A{}^p\varphi(x) &= \Phi_A{}^x\Phi_A{}^pA\varphi(x)=\frac{A}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}e^{ipxA}dp\int_\Omega e^{-ip\xi A}A\varphi(\xi)d\xi\\
&=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_\Omega\frac{\sin(N(x-\xi)A)}{x-\xi}A\varphi(\xi)d\xi\\
&=-\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}N^{-1}\int_\Omega\cos(N(x-\xi)A)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\varphi(\xi)-\varphi(x)}{x-\xi}\right)d\xi\\
&\quad+\frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{CN}\frac{\sin At}{t}A\varphi(x)dt \qquad [C\text{は集合 }x-\Omega\text{ の半径，第1項は0になる}]\\
&=\frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{\sqrt[4]{N}}e^{-t/\sqrt{N}}\frac{\sin\beta At}{t}e^{-\alpha At}A\varphi(x)dt\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=1}}\\
&\quad-\frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\mathrm{Im}\int_{\sqrt[4]{N}}^{CN}\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-t/\sqrt{N}}}{t}\right)(-\alpha+i\beta)^{-1}e^{-\alpha At+i\beta At}\varphi(x)dt\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=1}}\\
&=\frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^{CN}e^{-t/\sqrt{N}}\frac{\sin\beta At}{t}e^{-\alpha At}A\varphi(x)dt\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=1}}\\
&=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_0^\beta d\beta A\left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\alpha A-i\beta A\right)^{-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{N}}-\alpha A+i\beta A\right)^{-1}\right]A\varphi(x)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=1}}
\end{aligned}$$

---

1) 作用素の平方根の定義は作用素 $A^{n/2}$ の意味づけを $A^{n/2}=T^n$ により与えるために必要となる．

$= A\varphi(x)$

これより $\Phi_A{}^x\Phi_A{}^p\varphi=\varphi$. 閉包をとれば $\Phi_A{}^x\Phi_A{}^p=1$ となる.

5° 方程式の型が p-表現へ移っても不変なこと

方程式(1.16)の型は変換 $\Phi_A{}^{x_n}$ を用いて p-表現に移っても不変である. 実際, p-表現で書かれた(函数 $\tilde{\varphi}(p,t)$ に対する)方程式(1.16)に $\tilde{\varphi}=e^{iA\tilde{S}(p,t)}$ を代入したあと A^2 の係数をゼロとおけば, 再び Hamilton-Jacobi の方程式

$$a_1(x,t)\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}\right)^2+a_2(x,t)\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}-a_3(x,t)+(p+b(x,t))^2=0,$$

を得る[1]. ここに $\tilde{S}=\tilde{S}(p,t),\ x_i=-\partial\tilde{S}/\partial p_i$.

6° 波動力学および光学の方程式

1. 方程式(1.16)の係数に特殊な値を代入することによって得られる波動力学および光学の方程式の表を掲げよう. これから展開される理論の具体的応用の大部分はこれらの方程式に対するものである. これらはすべて先に導入した分類の意味で波動型に属することが容易にわかる.

ここに $\bar{E}=\bar{E}(x,t)$ は電場, $\bar{H}=\bar{H}(x,t)$ は磁場を表わす. $\Phi_0=\Phi_0(x,t)$ はスカラー・ポテンシャル, $\mathscr{A}_\mu=\mathscr{A}_\mu(x,t),\ \mu=1,2,3$ はベクトル・ポテンシャル $\mathscr{A}$ の成分であり, $\varepsilon=\varepsilon(x,t),\ \mu=\mu(x,t)$ はそれぞれ媒質の誘電率および透磁率, c は真空中の光速, m は粒子の質量, e は電荷である(Born-Wolf[1]). h は Planck 定数, $\bar{\sigma}_2=(\sigma_{21},\sigma_{22},\sigma_{23})$ は2次の Pauli 行列である.

$$\sigma_{21}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_{22}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_{23}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$\bar{\sigma},\bar{\alpha}$ は4次の Dirac 行列である(Schiff[1]):

$$\bar{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\qquad \bar{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$$

$$\alpha_k=\begin{pmatrix}0&\sigma_{2k}\\\sigma_{2k}&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_k=\begin{pmatrix}\sigma_{2k}&0\\0&\sigma_{2k}\end{pmatrix},\qquad (k=1,2,3)$$

2. このほか, $a_1=a_2=0,\ b=0,\ B_k=0,\ R=0$ とすれば Helmholtz の方程式が得られる. $a_3=1,\ A=\omega$ ととれば特性根がすべて純虚数のトンネル型である. $S\to iS'$ と変換すれば S' に対する実数解を得る. S' を定める方程式に対する特性系をもとのトンネル型方程式の陪特性系とよぶことにする.

3. 方程式(1.5)は(1.16)において

1) p-表現で与えられた方程式の特性帯の定義は§3, 段落4の一般の定義から従う.

表 1[1)]

方程式	解 ψ に対する常用の記号	a_1	a_2	a_3	b	$B_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$	R	A
1. スカラー波動	u	$-1/c^2(x,t)$ ($c(x,t)$ は媒質中の光速)	0	0	0	0	0	$i\frac{\partial}{\partial\tau}$ または ω[2)]
2. Maxwell	$\bar{E}$ $\bar{H}$	$-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}$	0	0	0	$\mathrm{grad}\ \ln\mu\times\mathrm{rot}\bar{E}+\mathrm{grad}(\bar{E}\cdot\mathrm{grad}\ \ln\varepsilon)$ $\mathrm{grad}\ \ln\varepsilon\times\mathrm{rot}\bar{H}+\mathrm{grad}(\bar{H}\cdot\mathrm{grad}\ \ln\mu)$	0	$i\frac{\partial}{\partial\tau}$ または ω[2)]
3. Dirac	ψ	$-\frac{1}{c^2}$	$-\frac{2\Phi_0}{c^2}$	$\frac{\Phi_0{}^2-m^2c^4}{c^2}$	$-\frac{e}{c}\mathcal{A}_\mu$ $\mu=1,2,3$	0	$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}-\frac{e}{c}\{(\bar{\alpha},\bar{E})+i(\bar{\sigma},\bar{H})\}$	$\frac{1}{h}$
4. Klein-Gordon-Фок	ψ	$-\frac{1}{c^2}$	$-\frac{2\Phi_0}{c^2}$	$\frac{\Phi_0{}^2-m^2c^4}{c^2}$	$-\frac{e}{c}\mathcal{A}_\mu$ $\mu=1,2,3$	0	$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}$	$\frac{1}{h}$
5. Pauli	ψ	0	1	Φ_0	$-\frac{e}{c}\mathcal{A}_\mu$ $\mu=1,2,3$	0	$\frac{e}{c}(\bar{\sigma}_2,\bar{H})$	$\frac{1}{h}$
6. Schrödinger	ψ	0	1	Φ_0	$-\frac{e}{c}\mathcal{A}_\mu$ $\mu=1,2,3$	0	0	$\frac{1}{h}$

1)〔訳注〕 Schiff [1], Берестецкий 他 [a] によって少し訂正した．ここに $\Phi_0=e\Phi$，また 5, 6 では質量 $m=1/2$ と正規化してある．

2) この節の最後(段落 5)を見よ．

$$a_1 = -\frac{1}{a^2(x,t)}, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\frac{b^2(x,t)}{a^2(x,t)}, \qquad A = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

とおき，残りの係数を 0 とすれば得られる．

4. 表 1 の方程式 2 と 3(Maxwell と Dirac) に対しては初期データは任意ではなく，一定の関係式を満たしている．これらの関係式は不変性を持っている．すなわち，初期時刻においてそれらが成立していれば，任意の時刻において成り立つ．

$$\bar{E}(x,0) = \bar{E}_0(x), \qquad \bar{H}(x,0) = \bar{H}_0(x),$$
$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}(x,0) = \bar{E}_0'(x), \qquad \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}(x,0) = \bar{H}_0'(x)$$

を Maxwell 方程式に対する初期条件とするとき，上述の関係式は

$$\mathrm{div}\, \varepsilon \bar{E}_0 = 0, \qquad \mathrm{div}\, \mu \bar{H}_0 = 0 \tag{I a}$$

$$\frac{\varepsilon}{c} \bar{E}_0' = \mathrm{rot}\, \bar{H}_0, \qquad \frac{\mu}{c} \bar{H}_0' = -\mathrm{rot}\, \bar{E}_0 \tag{I b}$$

である．次に Dirac 方程式の解 $\psi(x,t)$ の初期値

$$\psi(x,0) = \psi_0(x), \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = \psi_0'(x)$$

に対する関係式は

$$\frac{ih}{c} \psi_0' - \frac{e}{c} \Phi(x,0)\psi_0 = \left(\bar{\alpha}, \left(-ih\, \mathrm{grad}\, \psi_0 - \frac{e}{c} \mathscr{A} \psi_0\right)\right) + mc\alpha_4 \psi_0 \tag{II}$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．関係式 (I) および (II) は不変であって任意の時刻 t において満たされているから，通常行なわれているようにこれらを用いて Maxwell および Dirac の方程式を 1 階の方程式系の形に書くことができる[1]．その際，条件 I a は条件 I b に対応する方程式の解に直接課することができる．

5. スカラー波動方程式や Maxwell 方程式は普通は作用素 A に依存しないことに注意しよう．しかし初期条件の方は作用素 A に依存し得る．実際，最初の例 (1.1) においては初期条件 (1.2) は次のように表わされる：

$$u(x,0) = \varphi(x) f^+(x) = \varphi(x)[\xi + f(x)]^+{}_{\xi=0} = \varphi(x)[e^{f(x)d/d\xi}\xi^+]_{\xi=0}$$

つまり $A = i\partial/\partial\xi$, $g = \xi^+$ ととれば $u(x,0) = \varphi(x)e^{-iAf(x)}g$ となっている．このほ

1)〔訳注〕 (II) に対応する 1 階方程式系が普通 Dirac の方程式とよばれる．

か，'振動' 初期条件

$$u(x,0)=\varphi(x)e^{i\omega f(x)}$$

を与えることもできる(このとき $g=1, A=\omega$)．以上の例では初期条件はすべて A と特殊なかかわり方をしている．われわれは次の節において初期条件の型のこの特殊性が単なる偶然ではなく，物理的な問題設定自身により規定されたものであることを知るであろう．

§2 量子力学の方程式に対する Cauchy 問題の設定

よく知られているように量子力学は物理学的諸原理の全体系に基礎をおいている．ここではこれらのうちで実験と数学的道具との関係を定めるものや，方程式の記述に用いられるものには触れない．

量子力学において知られている数学的道具はすべて表1に掲げられたような発展型(非定常)偏微分方程式をもとに構成される．ゆえに量子力学の数学的理論を公理化するには，さらに，これらの方程式の解の初期値がどのような条件を満たさねばならないかを知る必要がある．そこで以下この初期条件の形を規定するのに役立つ量子力学の公理だけを掲げる．それらは '粒子の同一性' 原理および '量子力学と古典力学との対応' 原理である．これらは L_2 に属する任意の初期データに対応する解によっては到底満たされない．

1. '同一性' 原理に代用される公理を掲げよう．Schrödinger 方程式が3変数の二つの組 x_1, y_1, z_1 と x_2, y_2, z_2 に依存しており，これらの添え字の入れ換えによって方程式は不変であるとする．このとき初期条件は同じ添え字の入れ換えに対して高々符号のみ変わる．

容易にわかるように，方程式の解は初期時刻のみならず任意の時刻 t においてこの性質を有する．これは通常の定式化による '同一性' 原理が満たされていることを意味する(Ландау–Лифшиц[1], Schiff[1])．

2. 初期条件にかかるもう一つの限定は Schiff の '量子力学' の本で次のように述べられている：'われわれは適当な極限移行によっていかなる計算結果も古典的記述と一致することを要請する．この要請は Bohr の対応原理を表わしている…' (Schiff[1])．

3. '極限移行' という言葉の意味を説明しよう．$l_0, t_0, v_0=l_0/t_0, V_0$ を与えら

れた量子系を特徴づける一定の長さ，時間，速さおよびポテンシャルとする．量子力学的諸量の古典極限移行は無次元の量 $\nu=h/l_0mv_0$ が 0 に近づくようなこれら諸量の変化によって達成される．すなわち，いわゆる de Broglie 波の波長 h/mv_0 が系を特徴づける長さに比して小さくなることを意味する．他の無次元のパラメーター

$$\eta=\frac{c}{v_0},\qquad \kappa=\frac{eV_0}{m{v_0}^2}$$

(c は光速，e は電荷)は h や l_0 に依らない．また h は定数であるから ν が 0 に近づくのは l_0 の増大によって(あるいは V_0 および v_0 が $eV_0\sim m{v_0}^2$ を満たしつつ ∞ に近づくことによって)である．しかし普通は簡単のため $\nu\to 0$ または $l_0\to\infty$ の代わりに $h\to 0$ と仮定する．

このように，対応原理は微小パラメーター h を含む系に対してのみ適用される．これは同一性原理と異なる点である．

4. 今度は古典力学のいかなる問題が考えられているのかを調べよう．

パラメーター h を含む物理的に意味のあるすべての量子力学の具体的問題には完全に確定した古典力学の問題が対応している．この問題は通常の変分問題として設定することができる：右端を固定し，左端をある $k\leqq n$ 次元多様体に横断的に動かして[1)](特に $k=0$ なら固定して)汎函数の極値を求めること．

例として Schrödinger の方程式を考えよう．これに対応する古典変分問題に対する Euler 方程式は Newton の方程式

$$\mu\ddot{x}_i=-\frac{\partial v}{\partial x_i},\qquad (i=1,\cdots,n)$$

である．$\boldsymbol{R}^n$ に埋蔵された k 次元多様体 $x_0=x_0(\alpha)$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$, $k\leqq n$ を考える．拡張された横断性条件は次のように表わすことができる(Morse[1])[2)].

$$\frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\dot{x}_0(\alpha)}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\dot{x}_0(\alpha)}{\partial\alpha_i}=0,\qquad (i,j\leqq k)\tag{2.1}$$

1)〔訳注〕　左端をこの k 次元多様体上に拘束して変分をとることをこのようにいう．

2)〔訳注〕　いわゆる横断性条件(同書 p. 20, (2.1)式)は左端において

$$\left(L-\sum_{\nu=1}^{n}p_{0\nu}L_{p_{0\nu}}\right)dt_0+\sum_{\nu=1}^{n}L_{p_{0\nu}}dx_{0\nu}+d\theta=0$$

の形である．ここに $L=p^2/2+v$ であり θ は Lagrange 函数の不定性である．いまは $dt_0=0$ とし，$dx_{0\nu}$ が k 次元多様体 $x_0=x_0(\alpha)$ 内にとられていることに注意し $dx_{0\nu}=\sum\dfrac{\partial x_{0\nu}}{\partial\alpha_i}d\alpha_i$ を代入して両辺の外微分をとれば θ を含まぬ関係式(2.1)が得られる．

これには変数 $q=x, p=\mu\dot{x}$ の相空間において n 次元の非特異多様体 $q=q(\alpha)$, $p=\mu\dot{q}(\alpha)\ (\alpha=1,\cdots,n)$ を考えるのが便利である．条件(2.1)は次のように書き直される．

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p}{\partial \alpha_j}-\frac{\partial q}{\partial \alpha_j}\frac{\partial p}{\partial \alpha_i}\left[=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_\nu}{\partial \alpha_j}-\frac{\partial q_\nu}{\partial \alpha_j}\frac{\partial p_\nu}{\partial \alpha_i}\right)\right]=0, \qquad (i,j\leqq n) \tag{2.2}$$

つまり，多様体の任意の局所座標系についてLagrangeの括弧式が零に等しい．このような多様体をLagrange多様体とよぶことにする[1]．

4.1. $t=0$ におけるある系の状態 $\psi_1(x)$ から $t=\tau$ における状態 $\psi_2(x)$ への量子的遷移は次の式で記述される．

$$c_{12}(\tau)=\int\psi_2(x)K(x,\xi,\tau)\psi_1(\xi)dxd\xi. \tag{2.3}$$

ここに $K(x,\xi,\tau)$ はSchrödinger方程式(1.6)の基本解(Green函数)である．この遷移の確率は $|c_{12}(\tau)|^2$ に等しい．

(1.6)に対するCauchy問題の解は公式(2.3)において $\psi_2(x)=\delta(x-x')$ とおけば得られる．これは右端固定の問題に対応している．

基本解自身も $\psi_1(x)=\delta(x-\xi'), \psi_2(x)=\delta(x-x')$ とおけばこの公式から得られる．したがって基本解は点 $x=\xi'$ から時間 τ の後に点 $x=x'$ への粒子の量子的遷移を記述しており，これは両端固定の変分問題に対応している．初期Lagrange多様体はこの場合 $x=\xi'$ の形をしており，座標平面 $x=0$ に平行な面を表わす．

$$\psi(x,0)=\exp\left(\frac{ip_0x}{h}\right)$$

の形の初期値 ($p_0=(p_{01},\cdots,p_{0n})$ は定数) にはLagrange多様体 $p=p_0$ が対応する．h に依存しない初期条件の場合は多様体 $p=0$ である．

5. 対応の原理を用いてBohrは古典力学の量子化を行なったが，それは後になってわかったようにSchrödingerの量子化方程式(1.6)の真の解の $h\to 0$ における第一漸近項を与えたにすぎない．Schrödingerの量子化とは古典的運動量に作用素 $-ih\,\partial/\partial x$ を対応させ，またエネルギーに作用素 $ih\,\partial/\partial t$ を対応させ，こうしてHamilton–Jacobiの方程式に2階の線型偏微分方程式を対比させるも

1)〔訳注〕　以下，所によりLagrange‘部分’多様体ともよんでいるが同じものである．

のであった．量子化はこのように対応原理と密接に結びついている．上に導入した Schiff の定式化によれば対応原理とは量子化の逆概念である．量子化は古典的対象に，h に依存する量子的対象を対応させ，対応原理は計算結果が $h\to 0$ のとき古典的極限を持つことを要求する．対応原理が '量子化を助ける' 使命を持ったのは自然なことであった．

しかし対応原理は Schrödinger 方程式の勝手な解に対しては一般には満たされないことがわかる．たとえば，$\psi(x,t)$ を初期条件 $\psi(x,0)=\varphi(x)\exp(ix/h^2)$ を満たす Schrödinger 方程式の解としよう．このとき運動量の平均値は

$$-\int\bar{\psi}(x,t)ih\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)dx$$

に等しい (Schiff[1]) が，これは $h\to 0$ のとき無限大になる．つまり，対応原理を成り立たせるためには，あらかじめ Newton 方程式に対する初期条件，すなわち横断性の条件を量子化しておく必要がある．すなわち，各 Lagrange 多様体に x と h のある函数，つまり Schrödinger 方程式の初期値を対応させる(いい換えれば，Lagrange の括弧式(2.2)を量子化する)のである．この手続の後に初めて対応原理を証明することができる．

6. このようにして，問題は次の諸条件を満足する x と h の函数のクラス K を見出すこととなった．

1)　**漸近性**　K に属する x と h の二つの函数は両者の差が $h\to 0$ のとき 0 に平均収束するとき(すなわち $L_2[\boldsymbol{R}^n]$ のノルムで 0 に収束するとき)同値とみなされる．

2)　**対応原理の成立**　もし初期時刻において解がクラス K に属すれば，任意の時刻において対応原理が成り立つ，すなわち，物理的に意味のあるすべての量子的数値は $h\to 0$ のとき古典的数値になる．

3)　**不変性**　もし初期時刻において解 $\psi(x,0)$ がクラス K に属すれば，任意の時刻においても同じクラスに属する．

4)　**完全性**　条件(2.2)を満たす $x_0=x_0(\alpha)$, $\dot{x}_0=\dot{x}_0(\alpha)$ の形の任意の多様体にある函数 $\varphi_0\in K$ が対応する．$\psi(x,0)=\varphi_0$ を初期値とする方程式(1.6)の解 $\psi(x,t)$ に対応する量子力学的数値は $h\to 0$ のとき問題

$$\ddot{x} = -\frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad x_i(0) = x_{0i}(\alpha), \qquad \dot{x}_i(0) = p_{0i}(\alpha) \tag{2.4}$$

に対する古典力学的数値に収束する.

6.1. このようにして，われわれの目的のためには準古典近似，すなわちBohrの前期量子力学の近似においてLagrangeの括弧式を量子化しておけば十分である．話は先走るが，Lagrange多様体が力学系(2.4)に関して不変のときにはLagrangeの括弧式の量子化条件は前期量子力学におけるBohr–Sommerfeldの条件と一致することを注意しておこう.

掛け算作用素$1/h$とxに関する微分作用素の'同等性'を考慮に入れてクラスKにおける漸近条件をさらに強い条件でおきかえよう．空間$L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}]$において，掛け算作用素$1/h$と$x$に関する微分作用素の共通の定義域$D$を考える．$D$は$L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}]$のノルムでは閉じていない．$L_2[\boldsymbol{R}^{n+1}]$の各元の間で差が$D$に属するようなものを同一視し，こうして得られる空間(商空間[1)2)])を$S=L_2/D$で表わそう．漸近性の要求はクラスKがSに含まれれば満たされる．今後空間Sにおける等号，すなわちDに属する函数の不定性を除いて成り立つ等号を$f_1 \underset{S}{=} f_2$で表わすことにする．たとえば$\psi(x,t) \underset{S}{=} \psi_0(x,t)$など.

7. 不変な函数のクラスを作る問題はスカラー波動方程式の不連続性に関する問題に対しても立てることができる．問題(1.1)の解を$t>t_0$において考察すれば，Jacobi行列式$Y(t,x_0)$はある点$t=t'$においてゼロになるかもしれない．$n=2$で係数が解析的な場合には方程式(1.1)は最も簡単な場合(単純焦点集合の場合)に$t=t'$における不連続性の行状が研究されている．Бабич[2]–[3]によれば解の不連続性は非常に複雑な積分で記述される.

問題は不変な不連続性のクラスを作ること，すなわち$\psi(x,0)\in K$なら任意の時刻tにおいても$\psi(x,t)\in K$となるようなクラスKを作ることである．こうして問題は(1.1)の解に対する時間tに関する大域的なものとなる.

8. Hilbert空間Hに値をもつ$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$の2乗可積分函数の空間

---

1)　空間$L_2[\boldsymbol{R}^n]$は加法に関して群を成す．Dはその部分群である．L_2/Dを部分群Dによる剰余類の集合とすればこれは集合として線型空間Sの各元を与える．商空間L_2/Dは閉じていない〔というよりは自然な位相を持たない〕.

2)〔訳注〕　そもそも漸近展開とは数学的に抽象化すれば商空間を次々にとる操作(すなわちfiltration)であった．展開項を全部採った場合の一つの定式化についてはМаслов[a]やLeray[a]を見よ.

$L_2[\boldsymbol{R}^n, H]$を考えよう(第1部第2章§2を見よ)．AはH上の自己共役作用素で，任意のNに対し$D(A^N)$はHで稠密とする．$L_2[\boldsymbol{R}^n, H]$において§1-2°の意味での一般函数，すなわち$A^N f(x)$の形の函数を考えよう．ここに$f(x)\in L_2[\boldsymbol{R}^n, H]$．そこで示されたように$f(x)\notin D(A)$としても一般性を失わない．

そこで空間$L_2[\boldsymbol{R}^n, H]$に固執して，作用素Aと作用素$\partial/\partial x_i$ $(i=1, \cdots, n)$の共通の定義域に入らないような函数のクラスを選び出し，以下の結果をすべて$L_2[\boldsymbol{R}^n, H]$の函数に対して定式化することにしよう．これらの函数に作用素A^Nまたは$(\partial/\partial x_i)^N$を施せば一般函数となる．

第2章の定理は自明な書き換えによりすべて一般函数に対するものとなる．ゆえに定理を説明するための例においては一般函数を用いることにする．函数$f(x)\notin D$の特異部分を取り出すために商空間$S=L_2[\boldsymbol{R}^n, H]/D$を考えよう．すなわち，差が$D=D\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\cap D(A)$に属するような函数を同一視しよう．

一般の方程式(1.16)に対しても問題はやはり不変な函数のクラス$K\subset S$，すなわち，$\psi(x, 0)\in K$なら任意の時刻tに対しても$\psi(x, t)\in K$となるものを構成することとなる．

§3　作用素係数の方程式に対する特性帯の一般的定義

1. $\mathscr{H}[B]$を抽象的Banach空間Bに値を持つ$x=(x_1, \cdots, x_n)$の函数より成るあるBanach空間とする(たとえば$C^N[B]$または$W_p{}^N[B]$など)．

$\mathscr{H}'[B]$を次のノルムを持った空間とする．

$$\|g(x)\|_{\mathscr{H}'[B]} = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \right\|_{\mathscr{H}[B]} + \|g(x)\|_{\mathscr{H}[B]}$$

記号Sで商空間$\mathscr{H}[B]/\mathscr{H}'[B]$を表わそう．

LをBanach空間$\mathscr{H}_1[B_1]$からBanach空間$\mathscr{H}_2[B_2]$への有界線型作用素とする．Lは$\mathscr{H}_1'[B_1]$を$\mathscr{H}_2'[B_2]$に写すと仮定する．$S_1=\mathscr{H}_1[B_1]/\mathscr{H}_1'[B_1]$，$S_2=\mathscr{H}_2[B_2]/\mathscr{H}_2'[B_2]$とおく．作用素$L$は明らかに商空間$S_1$から商空間$S_2$への線型写像を引き起こす．この写像$L_S$を特性作用素とよぶことにする．ただ一つの変数$x_1$のみに依存するある函数$\chi(x_1)\in S_1$が存在し，これについて方程式$L_S\chi(\varphi(x))=0$が成り立つための必要かつ十分な条件が$\varphi(x)\in C^1$の満たすべきHamilton-Jacobi型のある方程式として書くことができるとする．このとき作

用素 L は特性帯を持つといい，函数 $\varphi(x), x=(x_1, \cdots, x_n)$ を決定するこの1階方程式を特性方程式とよぶことにしよう[1]．作用素 L に伴う特性方程式は一般には一つとは限らない．

作用素 L が C^k から C へ働く k 階の双曲型作用素のときにはこの特性帯の定義は普通のものと一致する．

2. iA を B において群を生成するある非有界作用素とする．上に指示された函数 $\chi(x_1)$ が，ある $g \in B$ をもって

$$\chi_g(x_1) = \exp(iAx_1)g$$

の形に書かれる場合には対応する方程式を A-特性方程式と名づけ，作用素 L は A-特性帯を持つということにしよう．さらに，もしも群を生成するすべての非有界作用素 iA に対し特性方程式が同一の形をしているならば，それを強特性方程式と名づけ，作用素 L は強特性帯を持つと言おう．容易にわかるように双曲系に対する古典的な特性方程式は，方程式の解がある Banach 空間 B に値をもつ函数であると仮定すれば（たとえば，あるパラメーターを含むとすれば）強特性方程式となる．

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x)\Delta u$$

に対して，方程式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = c^2(x)(\nabla S)^2 \qquad (3.1)$$

は強特性方程式であり，また

$$c^2(x)(\nabla S)^2 = 1 \qquad (3.2)$$

は $i\partial/\partial t$-特性方程式である．もしも方程式(3.1)に対する初期値が方程式(3.2)を満たせば，強特性方程式はこの場合 $i\partial/\partial t$-特性方程式と一致する．

3. さて，A-特性方程式の構成的定義に移ろう．$L(x, p, t, h)$ を Hilbert 空間 H 上の自己共役な（一般には非有界な）作用素でパラメーター $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $p=(p_1, \cdots, p_n)$, h および t に依存し $(0 \leqq |x| < \infty, 0 \leqq |p| < \infty, 0 \leqq t \leqq t_0, 0 \leqq h \leqq h_0)$，これらのパラメーターにつき無限回微分可能であるとする．$\lambda(x, p, t)$ をこれら

1) これは超曲面 $\varphi(x)=\text{const.}$ における不連続性に対応するものである．

のパラメーターにつき一様に孤立している作用素 $L(x,p,t,0)$ の点スペクトルとする．$L_2[\boldsymbol{R}^{n+1},H]$ は H に値をもつ $x=(x_1,\cdots,x_n)$ と h の函数の空間とする．$F(x,h)\in L_2[\boldsymbol{R}^{n+1},H]$ のノルムは

$$\|F\|_{L_2[\boldsymbol{R}^{n+1},H]}=\sqrt{\int_0^{h_0}dh\int_{-\infty}^{\infty}\|F(x,h)\|_H^2dx}$$

である．$L_2[\boldsymbol{R}^{n+1},H]$ において $L(x,\hat{p},t,h)$ の形の作用素を考えよう．ここに $\hat{p}_j=-ih\partial/\partial x_j$ であり，t はパラメーターで，L の作用に際しては初めに $\hat{p}_j$ が，次いで x_j が作用する．すなわち

$$L(x,\hat{p},t,h)F(x,h)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{-\infty}^{\infty}dpe^{ipx/h}L(x,p,t,h)\int e^{-ip\xi/h}F(\xi,h)d\xi.$$

$L_2[\boldsymbol{R}^n,H]$ に値をとる t の連続函数の空間において，作用素

$$ih\frac{\partial}{\partial t}-L(x,\hat{p},t,h) \tag{3.3}$$

を考えよう．この作用素に対しては $1/h$-特性方程式の一つは次の形をしている[1]．

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\lambda\left(x,\frac{\partial S}{\partial x},t\right)=0. \tag{3.4}$$

これは固有値 $\lambda(x,p,t)$ に対応するものである．この例においては h の代わりに τ の L_2 函数の空間に働く自己共役作用素 A のレゾルベントをとることができる．このとき $F(x,\tau)\in L_2[\boldsymbol{R}^{n+1},H]$ のノルムは

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\|F(x,\tau)\|_H^2dx}$$

をとらねばならない．すると方程式(3.4)は方程式(3.3)において $h=(A-z)^{-1}$ とおいたものに対する A-特性方程式となる(z は $\rho(A)$，すなわち A のレゾルベント集合からとる)．この A-特性帯の定義は以下に示されるように先に与えたものと一致する．

4. この段落では作用素係数の微分方程式に対する A-特性帯の一般的な構成的定義を与え，それを用いて方程式の分類を行なう．

L は Hilbert 空間 H に働く閉作用素で，そこで稠密な定義域をもち，$2n+3$ 個のパラメーター $p_1,\cdots,p_n,p_0,x_1,\cdots,x_n,t,\omega$ に依存し，そのうち p_0 について

1)〔訳注〕 g として固有値 λ に対応する L の固有ベクトルをとり，$e^{(i/h)S(x,t)}g$ に(3.3)を施せ．

は m 次の多項式であるとする[1]：

$$L = L(i\omega p, i\omega p_0, x, t, \omega) = \sum_{j=0}^{m} L_j(i\omega p, x, t, \omega)(i\omega p_0)^j. \qquad (3.5)$$

次の強極限が存在すると仮定しよう．

$$\lim_{\omega\to\infty} \omega^l L(i\omega p, i\omega p_0, x, t, \omega) = L^0(p, p_0, x, t) = \sum_{i=0}^{m} L_i{}^0(p, x, t)p_0{}^i. \quad (3.6)$$

ここに l はある実数とする．点 $\lambda(p, p_0, x, t)$ を，すべてのパラメーター $a \leqq p \leqq b$, $\alpha \leqq x \leqq \beta, c \leqq p_0 \leqq d, 0 \leqq t \leqq T$ について一様に孤立した作用素 $L_0(p, p_0, x, t)$ および $[L_0(p, p_0, x, t)]^*$ の重複度 $r \leqq \infty$ の共通点スペクトル[2]とする．A を H 上の L と可換なある非有界自己共役作用素とする．

H に値をもつ x と t の無限回微分可能な函数の空間において次の形の作用素 $\hat{L}$ を考える．

$$\hat{L} = L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right) = \sum_{j=0}^{m} L_j\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j$$
$$= \sum_{j=0}^{m} \hat{L}_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j. \qquad (3.7)$$

ここに作用素 $\hat{L}_j$ は次のように作用する．

$$\hat{L}_j\varphi = L_j\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right)\varphi$$
$$= \frac{A^n}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipxA} L_j(ipA, x, t, A)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\xi A}\varphi(\xi, t)d\xi \qquad (3.8)$$

方程式

$$\lambda(p, p_0, x, t) = 0, \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad p_0 = \frac{\partial S}{\partial t}, \qquad i = 1, \cdots, n$$
$$a \leqq p \leqq b, \qquad c \leqq p_0 \leqq d, \qquad \alpha \leqq x \leqq \beta, \quad 0 \leqq t \leqq T$$

を方程式

$$\hat{L}\psi(x, t) = F(x, t) \qquad (3.9)$$
$$\psi(x, t), F(x, t) \in C^\infty[H]$$

に対する特性方程式と名づけよう．(作用素 $\hat{L}$ の孤立点スペクトルは沢山あるかもしれないので，より正確には特性方程式の一つというべきである.)

---

1)〔訳注〕　通常の習慣では $\hat{p}$ が先に作用する場合は既出のように L の変数において $\hat{p}$ を x の後に書くが，本書ではこの順序にこだわりなく，常に $\hat{p}$ が先に作用する．

2)　函数 $\lambda(p, p_0, x, t)$ をタームとよぶ．

この方程式が p_0 に関して m 個の実根を持つとき，方程式(3.9)は波動型の特性帯を持つといい，m 個の根がすべて純虚数のときはトンネル型の特性帯を持つといおう．

ここに導かれた A-特性帯の構成的定義はこの節のはじめに与えられた定義と一致することが後になってわかる(定理4.1aおよび4.2を見よ)．§1の諸例において与えられた特性帯の定義が，ここに導かれた一般的定義から導かれることも容易にわかる．

§4 量子力学より古典力学への移行に際する表現の選択の問題

1. 第1部においては作用素の族 A_ε で $\varepsilon\to 0$ のとき作用素 A_0 に収束するようなものを考察し，作用素 A_0 に対する何らかの意味で一般化された摂動定理をうち立てた．しかしながら第1部第1章§1-2° で最初に注意しておいたように，この種の問題設定は何らかの先験的考察(たとえば物理的考察)から作用素 A_0 が極限であることが結論されるのでない限り意味がない．そうでなければ ε に依存するユニタリ変換を用いて作用素 A_ε の何かある別の表現 $\tilde{A}_\varepsilon$ に移ることができるであろうし，$\tilde{A}_\varepsilon$ の極限は A_0 とは別の作用素 $\tilde{A}_0$ となるかもしれない．

2. たとえば定常 Schrödinger 方程式

$$-\frac{h^2}{2}\frac{d^2\psi}{dx^2}+v(x)\psi=\lambda\psi, \qquad v(0)=0 \tag{4.1}$$

を見てみよう．$h\to 0$ とすれば量子力学は古典力学に移行しなければならないことが知られている．この際第1近似として古典的数値を，またさらにその量子的修正項を得ることが肝要である．Schrödinger 作用素

$$\hat{H}=-\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}+v(x)$$

は $h\to 0$ のとき掛け算作用素 $v(x)$ に収束する．すでに述べたように(第1部第3章§2-4° 例)，この作用素の固有函数を正規化して $h\to 0, \lambda_n\to\lambda$ のときそれらを(一般函数として)掛け算作用素 $v(x)$ の固有函数，すなわち δ 函数の1次結合に収束させることができるのであった．

この作用素において Fourier 表現(運動量表現)に移行すれば

$$\frac{p^2}{2}\tilde{\varphi}(p)+v\left(ih\frac{\partial}{\partial p}\right)\tilde{\varphi}(p)=\lambda\tilde{\varphi}(p) \tag{4.2}$$

となる．作用素 $\hat{H}$ はこの表現においては掛け算作用素 $p^2/2$ に収束し，固有函数は $\delta(p-\sqrt{2\lambda})$ と $\delta(p+\sqrt{2\lambda})$ の1次結合に収束する．

これら二つの問題はわれわれのもとの問題とは全く無縁である．肝要なことは $h\to 0$ のとき量子力学的諸量が古典的諸量に移行してくれるような作用素 $\hat{H}$ の表現を見出すことである．特に，全エネルギーの作用素 $\hat{H}$ は極限においても古典的全エネルギーに移行しなければならず，(4.1)の場合のようにポテンシャル・エネルギーだけに，あるいは(4.2)の場合のように運動エネルギーだけに移行しては困るのである．

3. まず初めに古典力学に戻ろう．エネルギー準位 E とポテンシャル・エネルギー $v(x)$ とが与えられているとする．エネルギー準位が E である力学系

$$\frac{dx}{d\tau}=p, \qquad \frac{dp}{d\tau}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{p^2}{2}+v(x)=E$$

を考察しよう．これより

$$\tau=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{2(E-v(x))}}.$$

明らかに距離 $\Delta\tau=\tau_1-\tau_2$ は軌道に沿う不変な推移で変わらない．そこで軌道に沿う時間的推移に関する時間的不変測度として $d\tau=dx/\sqrt{2(E-v(x))}$ を採用しよう．$\tilde{L}_2$ を τ の函数に対しノルム $\|f\|^2=\int_0^T|f(\tau)|^2d\tau$ で定まる Hilbert 空間とする．ここに T は半周期である：

$$T=\int_{t_1}^{t_2}d\tau=\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{2(E-v(x))}}.$$

点 x_1, x_2 は方程式 $E=v(x)$ の2根である(‘折返し点’)．したがって

$$\|f\|^2=\int_{x_1}^{x_2}|f(\tau(x))|^2\frac{dx}{\sqrt{2(E-v(x))}}.$$

時間に関する推移 $Q_t: Q_tf(\tau)=f(\tau+t)$ は力学系のユニタリな変換である．これに対応する自己共役作用素は $i\dfrac{d}{d\tau}$ の形である．

$v(x)$ は有界：$|v(x)|<1$，かつ $E>1$ としよう．このとき方程式 $v(x)=E$ は根を持たず，$\tilde{L}_2$ における積分は $-\infty$ から $+\infty$ までとられることとなる．通常

の L_2 空間を $\tilde{L}_2$ に写すユニタリ作用素 $S(t)$ を導入しよう．そのような作用素として函数

$$(2(E-v(x)))^{1/4}\exp\left\{-\frac{i}{h}\left(\int^x\sqrt{2(E-v(x))}\,dx+Et\right)\right\}$$

による掛け算作用素をとる．$f_1(x), f_2(x)\in L_2$ とすれば $S(t)f_1(x), S(t)f_2(x)\in \tilde{L}_2$ であって

$$\int_{-\infty}^{\infty}S(t)f_2(x)S^*(t)f_1(x)\frac{dx}{\sqrt{2(E-v(x))}}=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(x)dx.$$

これより作用素 $S(t)$ は実際に L_2 を $\tilde{L}_2$ にユニタリに写すことがわかる．作用素 $\hat{H}$ はこの新しい表現で

$$\tilde{H}=S(t)\hat{H}S^{-1}(t)=E-ih\frac{d}{d\tau}-\frac{h^2}{2}\sqrt[4]{2(E-v(x))}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt[4]{2(E-v(x))}}$$

の形をしており，これは $\tilde{L}_2$ 上の作用素である．このように，$h\to 0$ のとき‘準古典的’表現による作用素 $\tilde{H}$ は第１近似において全エネルギー E に移行することがわかった．第２近似としては作用素 $\tilde{H}$ は古典力学系の自己共役作用素に移行する．

ユニタリ作用素 $e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}$ は準古典表現で次の形をしている．

$$\begin{aligned}S(t)e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}S^{-1}(0)&=\exp\left\{\frac{i}{h}[S(t)\hat{H}S^{-1}(t)-E]t\right\}\\&=\exp\left\{i\left(-i\frac{d}{d\tau}-\frac{h}{2}\sqrt[4]{2(E-v(x))}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt[4]{2(E-v(x))}}\right)t\right\}.\end{aligned}$$

これより第１部定理 4.4 を用いて

$$S(t)e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}S^{-1}(0)\to e^{t\frac{d}{d\tau}}=Q_t$$

が導かれる．すなわち，Schrödinger のユニタリ作用素 $e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}$ は準古典表現において力学系のユニタリ作用素に収束する．さらに，準古典表現において方程式

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+v(x)\psi$$

の解は第１部の定理 3.6 を用いて h の漸近冪級数の形に表わすことができる．

4. §1 において得られた Schrödinger 方程式

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi+v(x)\psi,\qquad x=(x_1,\cdots,x_n)$$

の解((1.12)式)は，準古典表現に移れば摂動論の助けを借りて導くことができる.

Newton 方程式

$$\mu \ddot{x}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad (i=1, \cdots, n)$$

の解の n パラメーター族 $x(\alpha, t)$, $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ が存在するとする．Y を α の x に対する Jacobi 行列式 $\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)/\partial(x_1, \cdots, x_n)$ とし，S を力学において作用の役を果たすある函数として変換

$$\psi = \varphi \sqrt{Y} e^{\frac{i}{h}S}$$

を行なえば，Schrödinger 方程式は

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{ih}{2\mu} Y^{-1/2} \Delta(Y^{1/2}\varphi)$$

となる[1]．ここに，左辺は古典軌道に沿った時間に関する導函数である．$h=0$ のとき方程式の解は古典軌道に沿って一定となる．この表現においても作用素 $e^{\frac{i}{h}\hat{H}t}$ は $h\to 0$ のときやはり古典軌道に沿った推移の作用素に移行する．このことは第1部定理3.2よりわかる.

変数 α および t に移れば

$$\varphi(x, t) = \varphi(x(\alpha, t), t) = \tilde{\varphi}(\alpha, t)$$

となり方程式は

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{ih}{2\mu} Y^{-1/2} \Delta_\alpha (Y^{1/2} \tilde{\varphi}(\alpha, t)) \tag{4.3}$$

の形となる．ここに Δ_α は座標 α に関する Laplace 作用素である．$\psi(x, t)$ から $\tilde{\varphi}(\alpha, t)$ への変換はユニタリであって

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}(\alpha, t)|^2 d\alpha$$

を満たし，位置表現から準古典表現への移行を実現する．こうして方程式(4.3)に対し摂動論を適用することができる.

このような表現は一般に局所的にのみ(すなわち十分小さな t に対して)，しかも条件

1)〔訳注〕 第5章§1-1°の計算を見よ.

$$\left|\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqq C$$

のもとに可能である．局所的準古典表現はこの部の第2章において詳細に調べられる．第3章においては一般に Lagrange 多様体 Γ の上の α の函数の空間 $\tilde{L}_2$ を x の函数の空間 L_2 に写すユニタリ作用素の役が，そこで導入される正準作用素によって果たされることがわかる．このようにして正準作用素を用いることにより量子力学から古典力学への移行が大域的に，すなわち任意の時刻に対して成り立つような表現が得られる．

一般の方程式(1.16)に対しては R_z の冪による漸近級数の形の解が得られるような表現を特性表現と名づける．

第2章　正準作用素

§1　1次元の場合

まず，1次元の場合の正準作用素を説明しよう．以下の方針に沿って考察する．x 軸上で，x について一様な漸近公式を構成するために，パラメーター h に依存するある作用素を構成する必要がある．それは相空間(phase space) (p, q)内の与えられた曲線 Γ 上の函数を q 軸上の函数へ写す作用素である．この作用素を正準作用素という．この作用素を構成するために曲線上の道に対して指数という概念を導入し，また，曲線を座標軸 p あるいは q へ1対1射影可能(微分同型のことを意味する)な弧(区間)でおおう必要がある．最初に正準作用素を，これらの各々の弧に対して局所的に定義し，次に1の分解を使って，曲線 Γ 上に作りあげる．一般には，正準作用素は曲線 Γ をおおう弧および1の分解に依存している．しかしながら，もし，曲線が閉じていなければ，この依存性はパラメーター h について1次のオーダーでしかありえないことが示される．同じことは，閉曲線の場合にも，物理学において Bohr の量子条件とよばれる関係を平面曲線が満たすならば成り立つ．正準作用素を用いて，よく知られた定常 Schrödinger 方程式の固有函数の漸近式，あるいは Schrödinger 方程式の Cauchy 問題の解の漸近式を得る．この節で述べる定理は，より一般の多次元の場合の特別な場合である．

1°　位相的命題

相平面に，1次元多様体 Γ，すなわち，方程式 $\{q(\alpha), p(\alpha)\}$ で定義される曲線を考えよう．パラメーター α は曲線上のある固定点より測った弧の長さとみなしてよい．Γ 上の点 $(q(\alpha), p(\alpha))$ を α でもって示す．曲線 Γ 上の点 α において $dq/d\alpha \neq 0$ であるならば，その点を非特異とよぶことにする．あるいは，より詳しく，曲線 Γ の p 軸にそっての q 軸への射影に関して非特異であるという．非特異でない点を特異点という．

まず，特異点の集合 M は有限で，特異点を Γ に沿って越える際 dq/dp の符号は変化するものと仮定しよう．特異点 α に dq/dp の正の方向へ向った単位

接ベクトル $\bar{e}_\alpha$ を対応させる．$\alpha^1, \alpha^2 \notin M$ とし，α^1 を始点，α^2 を終点とする道 $l[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma$ に対して，指数を次のように定義する：もし道が特異点 α を通過する際，接ベクトル $\bar{e}_\alpha$ の向きに通り過ぎれば $+1$ とし，逆向きに通り過ぎれば -1 とし，その和でもって道 $l[\alpha_1, \alpha_2]$ の指数を定める(図5を参照)．$l[\alpha^1, \alpha^2]$ の指数を $\mathrm{Ind}\, l[\alpha^1, \alpha^2]$ で表わす．以上によりわれわれは集合 M と，始点 α_1 および終点 α_2 に条件を課することにより道の指数を定義した．これらの条件は，曲線や道が一般的な位置にあるときには成り立つ(Понтрягин[1]–[2], Abraham[1])．

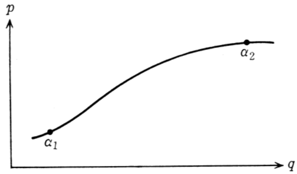


図 **5–a**　$\mathrm{Ind}\, l[\alpha_1, \alpha_2] = 0$

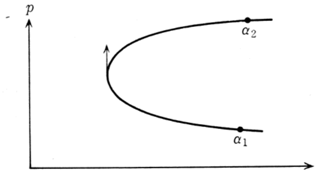


図 **5–b**　$\mathrm{Ind}\, l[\alpha_1, \alpha_2] = 1$

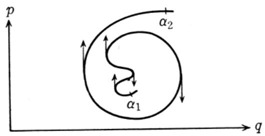


図 **5–c**　$\mathrm{Ind}\, l[\alpha_1, \alpha_2] = 3$

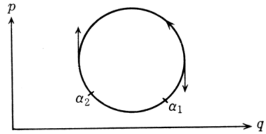


図 **5–d**　$\mathrm{Ind}\, l[\alpha_1, \alpha_2] = -2$

任意の道および曲線 Γ に対しては，軸を時計方向に微小回転させ，それらを一般的位置にすることにより指数を定義する．次の重要な命題が成立する．その証明はほとんど明らかであろう．

閉じた道(サイクル)の指数は，向きを保つ微分同型により不変である．

さて，Hamilton 系

$$\dot{q} = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q} \tag{1.1}$$

を考えよう．ここで $H(p, q, t)$ はすべての変数に関して十分滑らかな函数としよう．$\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ でもって，自分自身とは交わらない相平面内の曲線 Γ を表わそう．$Q(\alpha, t) = q(t), P(\alpha, t) = p(t)$ を(1.1)の初期条件 $\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ を満たす解

とする．$Q(\alpha,t), P(\alpha,t)$ は曲線 Γ を他の曲線 Γ_t に写す写像 u_t を定義する．すなわち $u_t\Gamma=\Gamma_t$．すべての道 $l[\alpha^1,\alpha^2]$ はこの写像 u_t により，Γ_t 上の道 $u_t l[\alpha^1,\alpha^2]=l_t[\alpha^1,\alpha^2]$ に写される．

$\mathrm{Ind}\, l_t[\alpha^1,\alpha^2]$ を $\mathrm{Ind}\, l[\alpha^1,\alpha^2]$ でもって表わせるか？ ということを考えよう．この問題に答えるために，系(1.1)の解に対していくつかの定義をしよう．

(1)　τ が 0 から t まで変化するときの集合 $Q(\alpha^0,\tau)$ を軌道(trajectory)とよび，$Q(\alpha^0;0,t)$ で表わす．

(2)　軌道 $Q(\alpha^0;0,t)$ 上の点で，点 $Q(\alpha^0,\tau)$ において $\partial Q(\alpha_0,\tau)/\partial\alpha=0$ が成り立つとき，その点を焦点(focal point)という．

(3)　$\partial^2 H/\partial p^2>0$ とする．軌道 $Q(\alpha^0;0,t)$ の指数を区間 $0<\tau\leqq t$ における焦点の数でもって定義する(Morse の指数ともいう．Morse[1]，Лаврентьев–Люстерник[1])．

前述の問題の解答として，次の関係式が成り立つ：

$$\mathrm{Ind}\, l[\alpha^1,\alpha^2]+\mathrm{Ind}\, Q(\alpha^2;0,t)=\mathrm{Ind}\, l_t[\alpha^1,\alpha^2]+\mathrm{Ind}\, Q(\alpha^1;0,t). \quad (1.2)$$

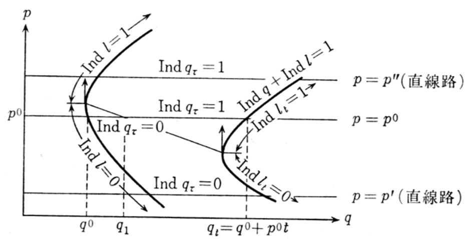


図 6-a　$\mathrm{Ind}\, q_t+\mathrm{Ind}\, l=\mathrm{Ind}\, l_t$

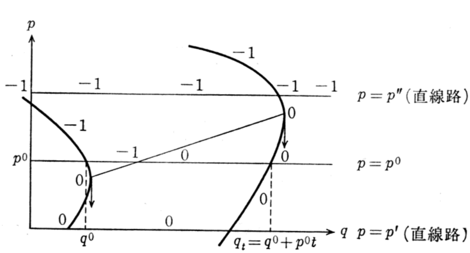


図 6-b　$\mathrm{Ind}\, q_t+\mathrm{Ind}\, l=\mathrm{Ind}\, l_t$　　0, −1 は l, l_t, q_τ の指数を表わす．

$H=p^2/2$ のとき，この事実は幾何学的に解明される．十分小さい時間および特異点の近傍を考えれば十分である．接ベクトル $\bar{e}_\alpha$ の向きに応じて二つの場合を考え得る(図 6 参照)．図 6–a において，道 $p=p^0$ が一つの焦点を通り過ぎるものとしよう．したがって $Q(\alpha,\tau)=p^0\tau+q^0$ $(0\leqq\tau\leqq t)$ の指数は 1 に等しい．図から明らかなように，Γ_t 上の道 l_t の指数も 1 に等しい．

次に $H=p^2/2+v(q)$, $v(q)\in C^2$ とする．このとき，十分小さい時刻 t に対して

$$Q(\alpha,t)\cong p^0(\alpha)t+q^0(\alpha), \qquad P(\alpha,t)\cong p^0(\alpha)-v'(q^0(\alpha))t$$

が成り立つ．そこでまず最初に

$$p_1=p^0(\alpha), \qquad q_1=q^0(\alpha)+p^0(\alpha)\tau \qquad (0\leqq\tau\leqq t)$$

と変形しよう．この変形により，曲線 Γ は $\Gamma_t{}'$ に変形される．次に $q=q_1$ は固定して，$p=p^0(\alpha)-v'(q^0(\alpha))\tau=p^1-v'(q^0(\alpha))\tau$ $(0\leqq\tau\leqq t)$ と変形を行なう．これにより $\Gamma_t{}'$ は Γ_t に移る．これらの変形は指数の間の関係式を変えないことは明らかである．

2°　正準作用素

曲線 Γ 上の測度 $d\alpha$ に関して 2 乗可積分な Hilbert 空間 H の値をとる函数空間 $L_2[\Gamma,H]$ と $\Gamma=\boldsymbol{R}^1$ とおいた函数空間 $L_2[\boldsymbol{R}^1,H]$ を考えよう．A を非有界正定値自己共役作用素とする．

われわれの興味の対象となるのは，$L_2[\Gamma,H]$ に属する函数の商空間

$$S=L_2[\Gamma,H]/D(A)\cap D\left(\frac{d}{d\alpha}\right)$$

における値である．

われわれは S において定義された線型作用素を考えよう．

曲線 Γ が q 軸へ 1 対 1 射影可能な場合をまず考察する．このことは方程式 $q=q(\alpha)$ が $\alpha=\alpha(q)$ と解けることを意味する．さて，$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}$ でもって，台がコンパクトな H の値をとる滑らかな函数 $\varphi(\alpha)$ に対して，次のように定義される線型作用素を表わすことにしよう：

$$(K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}\varphi)(x)=\left[e^{i\gamma}\left|\frac{dq}{d\alpha}\right|^{-1/2}_{\alpha=\alpha(q)}\exp\left\{iA\int_{\alpha^0}^{\alpha(q)}p\,dq\right\}\varphi(\alpha(q))\right]_{q=x}. \qquad (1.3)$$

この式において，γ は α によらない定数，α^0 は Γ 上の点とする．

次に Γ が q 軸へは 1 対 1 射影可能ではないが，p 軸へは射影可能な場合を考

えよう．すなわち $p=p(\alpha)$ より $\alpha=\alpha(p)$ と解ける場合である．このときは $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ を次のように定義する：

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi=\frac{e^{i(\gamma-\pi/4)}}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ipxA}\left|\frac{dp}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha(p)}^{-1/2}\exp\left\{-iA\int_{\alpha^0}^{\alpha(p)}qdp\right\}\varphi(\alpha(p))dp. \tag{1.4}$$

γ は定数であり，α^0 は $dq/d\alpha|_{\alpha=\alpha^0}=0$ となる Γ 上の点とする．積分は $\varphi(\alpha(p))$ が零でない区間で行なうものとする．もし x が函数 $\varphi(\alpha)$ の台の q 軸への射影像の外にあれば

$$(K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi)(x)\underset{\mathrm{S}}{=}0 \tag{1.4.1}$$

である．

次に q 軸あるいは p 軸へ射影可能な任意の曲線 Γ を考察しよう．Γ を有限個の弧(区間) Ω^i でおおい，その各々においては $dq/d\alpha\neq0$，あるいは $dp/d\alpha\neq0$ かつある点で $dq/d\alpha=0$ が成り立つものとする．最初の条件 $(dq/d\alpha\neq0)$ が成り立つ領域を非特異，後の条件が成り立つものを特異ということにする．非特異領域では $q(\alpha)$，特異領域では $p(\alpha)$ が局所座標としてとれる．$\Omega_0{}^{j'}$ で局所座標 $q(\alpha)$ をもつ非特異領域(非特異地図)を表わし，$\Omega_1{}^j$ で局所座標 $p(\alpha)$ をもつ特異領域(特異地図)を表わす．$\Omega_0{}^{j'}(j'=j_1',j_2',\cdots,j_n',\cdots)$ を非特異地図の全体，$\Omega_1{}^j$ $(j=j_1,j_2,\cdots,j_n)$ を特異地図の全体とする．特異領域 $\Omega_1{}^j$ に属する点で $dq/d\alpha=0$ となる点を一つ選び，それを α_j とし，中心点とよぶことにする．非特異領域 $\Omega_0{}^{j'}$ においては，勝手に一つ点を選び $\alpha^{j'}$ としそれもまた中心点ということにする．$\Omega_0{}^{j'},\Omega_1{}^j$ の全体で曲線の地図帳 $\mathscr{H}$ をつくる．地図帳 $\mathscr{H}$ の中の一つの中心点 α^0 を選び始点とし，実数 γ^0 を対応させよう．

函数 $\varphi(\alpha)$ の台 R が Ω^j の内にあるとしよう．そのとき $\varphi(\alpha)$ に対して正準作用素は，もし Ω^j が非特異領域であるならば(1.3)で，Ω^j が特異領域ならば(1.4)で定義する．これらの式において $\gamma=\gamma_0-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\,l[\alpha^0,\alpha^j]$ とおく．$l[\alpha^0,\alpha^j]$ は α^0 と α^j を結ぶ道である．より一般の場合は1の分解を用いて定義する．

$\{e^i(\alpha)\}_{i=1,2,\cdots,N}$ でもって，コンパクト集合 R をおおう開被覆 $\{\Omega^i\}$ に対応する1の分解とする．すなわち $\{e^i(\alpha)\}$ は次の条件を満たす：1) $e^i(\alpha)\in C^\infty$，2) $e^i(\alpha)$ の台は Ω^i に含まれる．3) $\alpha\in R$ ならば $\sum_{i=1}^N e^i(\alpha)=1$.

コンパクトな台をもつ函数 $\varphi(\alpha)$ に対しては $\varphi(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}e^i(\alpha)\varphi(\alpha)$ であり，$e^i(\alpha)\varphi(\alpha)$ の台は Ω^i に含まれるから，$e^i(\alpha)\varphi(\alpha)$ に対しては正準作用素を定義することができる．線型性と(1.4.1)より，結局，われわれはコンパクトな台をもつ函数に対する正準作用素を得る．それを具体的に述べよう．

$j(x)$ でもって，直線 $q=x$ および R と交わる地図の番号の全体を表わす．一般の場合の正準作用素 $K_{A,\Gamma}^{\gamma_0,\alpha_0}$ は次の形をしている．

$$(K_{A,\Gamma}^{\gamma_0,\alpha_0}\varphi)(x)=e^{i\gamma_0}\sum_{j,j'\in j(x)}\left[\exp\left\{-\frac{\pi}{2}i\,\mathrm{Ind}\,l[\alpha^0,\alpha^{j'}]\right\}e^{j'}(\alpha(q))\left|\frac{dq}{d\alpha}\right|^{-1/2}\right.$$
$$\times\exp\left\{iA\int_{l[\alpha^0,\alpha(q)]}pdq\right\}\varphi(\alpha(q))+\exp\left\{-\frac{\pi}{2}i\,\mathrm{Ind}\,l[\alpha^0,\alpha^j]\right\}\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2\pi i}}$$
$$\left.\times\int e^{ipqA}e^j(\alpha(p))\left|\frac{dp}{d\alpha}(\alpha(p))\right|^{-1/2}\exp\left\{-iA\int_{l[\alpha^0,\alpha(p)]}qdp\right\}\varphi(\alpha(p))dp\right]_{q=x}. \tag{1.5}$$

ここで $l[\alpha^0,\alpha^k]$ は α^0 と α^k を結ぶ道である．

注意 もし Γ が非有界な曲線で $A=1/h$ のとき，公式(1.5)において，以下に述べるような $\xi(\alpha,h)$ を選んで，$\varphi(\alpha)$ を $\xi(\alpha,h)\varphi(\alpha)$ と置きかえることにより，有界な $\varphi(\alpha)$ に対して収束させることができる．$\xi(\alpha,h)$ は正則化作用素ともいうべきもので，$\xi(\alpha,h)-1$ は任意の有界な領域において $O(h^\infty)$ であり，また $\alpha\to\infty$ のとき，$\xi(\alpha,h)$ は急激な速さで零に収束する函数である(たとえば $\exp\{-\alpha^2\exp(-1/h)\}$)．このように正準作用素を定義しても，適当な条件のもとで後で定式化される定理の結果は，任意の領域で成り立つ．同様の主張は多次元の場合も成り立つ．

例 図7において曲線 Γ は $q=a\cos\alpha, p=a\sin\alpha, -5\pi/2\leqq\alpha\leqq-\pi/2$ で定義される円とする．$\varphi(\alpha)\equiv1$ として正準作用素を計算してみよう．$\alpha^0=-\pi/2, \gamma_0=0$ とおく．$l[\alpha^0,\alpha]$ は，開きの角が 2π より小さい α^0 より時計のまわる方向へ α までまわる道とする．被覆 Ω_i を図7-aのようにとる．中心点は $\alpha^0=-\pi/2, \alpha^1=-\pi, \alpha^2=-3\pi/2, \alpha^3=-2\pi$ とする．

定義より

$$\mathrm{Ind}\,l[\alpha^0,\alpha^1]=0\qquad\mathrm{Ind}\,l[\alpha^0,\alpha^2]=1\qquad\mathrm{Ind}\,l[\alpha^0,\alpha^3]=1.$$

この開被覆に対する1の分解 $\{e_i(\alpha)\}_{i=0,1,2,3}$ は図7-bに描かれるような形を

$$j(x)=\begin{cases} 1 & -a<x<x_1 \\ 0,1,2 & x_1<x<x_2 \\ 0,2 & x_2<x<x_3 \\ 0,2,3 & x_3<x<x_4 \\ 3 & x_4<x<a \end{cases}$$

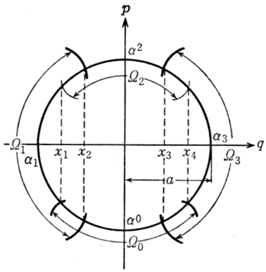


図 7–a　地図帳 $\mathscr{H}$, $q=a\cos\alpha$, $p=a\sin\alpha$; Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3 地図.

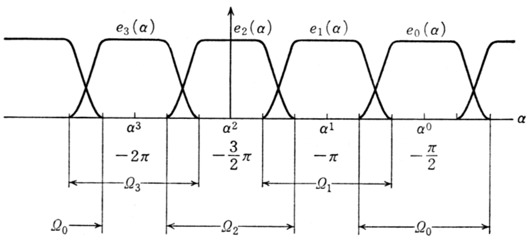


図 7–b　$\{\mathscr{H}\}$に関する 1 の分解　$\sum_{i=0}^{3} e_i(\alpha)\equiv 1$, $e_i(\alpha)\in C^\infty$, $e_i(\alpha)=0$, $e\notin\Omega_i$.

している．正準作用素を 1 に作用させると，$-a<x<0$ に対しては

$$K^{0,-\pi/2}_{p^2+q^2=a^2}1 = (a^2-x^2)^{-1/4}\exp\left\{\frac{i}{h}\left(-\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{|x|}{a}+\frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{\pi a^2}{4}\right)\right\}$$
$$-i(a^2-x^2)^{-1/4}\exp\left\{\frac{i}{h}\left(\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{|x|}{a}-\frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{\pi}{4}a^2\right)\right\} \qquad (1.5.1)$$

となる．この表現は $v(x)=x^2$ の場合の準古典近似と一致している．

3° 正準作用素の不変性

曲線 Γ が閉じていないとする．このとき，正準作用素 $K^{r_j\alpha^0}_{A,\Gamma}$ は地図帳，1 の分解の選び方に依らない．すなわち表現 $K^{r_j\alpha^0}_{A,\Gamma}\varphi(\alpha)$ のこれらの選び方による差は $K^{r_j\alpha^0}_{A,\Gamma}F(\alpha)$, $F(\alpha)\in D(A)\cap D(\partial/\partial\alpha)$ の型の函数だけである．

新しい地図帳においても，その始点は変らないものとする．このことはある地図においては中心点が変らないことを意味する．

もし始点 $\alpha=\alpha^0$ が $\alpha=\alpha_1{}^0$ に変ったとすると，そのとき，以前の正準作用素は

空間 S において $K_{A,\Gamma}^{\tilde{\gamma},\alpha_1{}^0}$ に等しい．ここで

$$\tilde{\gamma}=\gamma-\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0,\alpha_1{}^0]+A\int_{l[\alpha^0,\alpha_1{}^0]}pdq$$

である．

もし Γ が閉じているとすると，$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ は地図帳，1 の分解には依らないが，道 $l[\alpha^0,\alpha^k]$ のとり方には依存する．この場合，正準作用素 $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ が道 $l[\alpha^0,\alpha^k]$ に依存しないための必要十分条件は作用素 A のスペクトル点が条件

$$\lambda=\frac{2\pi\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{\oint pdq}+O(\lambda^{-1}) \tag{1.6}$$

を満たすことである．もし $\lambda=1/h$ であれば，この公式はよく知られた Bohr の量子化条件と一致する．座標の始点に関する注意は閉曲線の場合も同様である．条件(1.6)は正準変換で不変な条件である．

4° 準古典近似

1. $\boldsymbol{R}^1$ における次の固有値問題を考える：

$$y''+\nu Q(x)y=0 \qquad (Q(x)=\lambda-v(x)) \tag{1.7}$$

$$\int|y|^2dx<\infty. \tag{1.7 a}$$

ここで $Q(x)\in C^\infty, Q(\pm\infty)=-\infty$ とする．

相平面 (q,p) において $p^2/2-Q(q)=0$ を考えよう．(1.7), (1.7 a) の固有値 $\nu=\nu_n$ は条件(1.6)を満たすことは知られている(Kamke[1], Titchmarsh[1])．

Schrödinger 方程式

$$-\frac{h^2}{2\mu}\ddot{\psi}+v(x)\psi=\lambda\psi, \qquad \int\psi^2dx<\infty \tag{1.8}$$

を考察しよう．$v(x)\in C^\infty, v(\pm\infty)=\infty$ であるとする．このとき次のことが成り立つ．

$\Gamma_n=(q_n(\alpha),p_n(\alpha))$ を次の方程式を満たす閉じた曲線とする：

$$\mu\frac{dq_n}{d\alpha}=p_n(\alpha), \qquad \frac{dp_n}{d\alpha}=-\left.\frac{\partial v(q)}{\partial q}\right|_{q=q_n},$$

$$\frac{p_n{}^2}{2\mu}+v(q_n)=E_n,$$

E_n は h に依存し，

$$E_n \subset [\alpha, \beta] \qquad (\alpha > 0), \qquad \oint p dq = 2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)h$$

を満たすように定める．このとき h に依存する固有値 λ_n と固有函数 $\psi_n(x)$ があって

$$\lambda_n - E_n = o(h^2) \qquad \|\psi_n - K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_n}1\| = o(h)$$

を満たす．

この結果は停留位相の方法(Федорюк[1])を用いるとよく知られたものに帰着できる．われわれが求めた固有函数の第1近似は p 表現に移っても変らない．

2. Schrödinger 方程式に対する Cauchy 問題(第1章(1.6))については次の命題が成り立つ：

$v(x,t)\in C^3, \varphi(\alpha)\in C^2$ とする．初期条件

$$\psi(x,0) = K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma}\varphi(\alpha) \qquad \Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\} \tag{1.9}$$

を満たす Cauchy 問題の解は

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t}\varphi(\alpha) + z_h(x,t) \tag{1.10}$$

と書ける．ここで $\Gamma_t = \{Q(\alpha,t), P(\alpha,t)\}$ は，次の Hamilton 方程式系

$$\begin{aligned} \mu\dot{Q}(\alpha,t) &= P(\alpha,t) \qquad Q(\alpha,0) = q^0(\alpha) \\ \dot{P}(\alpha,t) &= -\frac{\partial v}{\partial Q}(Q,t) \qquad P(\alpha,0) = p^0(\alpha) \end{aligned} \tag{1.11}$$

の解曲線であり，

$$\gamma = \frac{1}{h}\int_0^t \left\{\frac{\mu\dot{Q}(\alpha^0,\tau)^2}{2} - v[Q(\alpha^0,\tau)]\right\}d\tau - \frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\, Q(\alpha^0;0,t)$$

$$\int |z_h(t,x)|^2 dx \to 0 \quad (h\to 0)$$

である．

われわれは，結局，Schrödinger 方程式の Cauchy 問題の解は任意の時刻 t において $z_h(x,t)$ という函数を法として $K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t}\varphi(\alpha)$ と表わされる函数のクラスに属することを知る．このような函数族をとれば不変性(第1章§2)の条件は成り立っている．

対応原理もこの種の解に対しては成り立つ．

3. 系　函数 $\varphi(\alpha)$ の台 R は十分小さいとしよう：$R\subset\{\alpha_0-\varepsilon\leqq\alpha\leqq\alpha_0+\varepsilon\}$．前述の命題の条件が成り立っているとする．もし R の Γ_t 上の像 R_t が非特異点から成っているならば

$$\int_{\alpha(x)\in R_t}|\psi(x,t)|^2dx \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_R|\varphi(\alpha)|^2d\alpha$$

が成り立つ．この領域の外では零に収束する．もし R_t が特異地図に含まれているならば

$$\int_{\alpha(p)\in R_t}|\psi(p,t)|^2dp \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_R|\varphi(\alpha)|^2d\alpha$$

が成り立ち，この領域の外では零に収束する．したがって，x あるいは p-表現による $|\psi|^2$ の積分は $h\to 0$ のとき古典的確率 $\int|\varphi(\alpha)|^2d\alpha$ に近づく．これは古典軌道にそっては一定に保たれる．同様に，すべての量子力学的量は $h\to 0$ における極限においては古典力学的量に近づく，すなわち対応原理が成り立っていることを確めることができる．かくして，第1章§2段落6において要請された函数 K に対する条件は

$$K=\{K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma}\varphi(\alpha)\}$$

に対しては成り立っている．

よって，われわれはすべての点 (x,t) において，古典力学への移行を得たのである．すなわち極限は焦点(折返し点)においても存在し，そこでは p-表現で考察しなければならない．物理学の文献(たとえば Ландау–Лифшиц[1])においては，折返し点の近傍では準古典的条件がそこなわれ，$h\to 0$ の際，古典力学への移行はないというふうに述べてあることを注意しておこう．同様のことは，焦点の近傍における波動光学と幾何光学の対応関係においても，他の物理学の文献の中に述べられている(Born[1], Sommerfeld[1])．

しかし，われわれは古典力学への移行(同様に幾何光学への移行)がすべての点において成り立っていることをみる．折返し点においてはただ函数 ψ を p-表現しなければならないだけである．

5° 漸近級数

以下漸近級数を取り扱うので，漸近的な意味で等しいということを定義しよう．空間 H に値をとる函数 $F(x,t)$ が零と同値であるとは，任意の自然数 N_1,

N_2, N_3 に対して，函数

$$A^{N_1-N_2-N_3}\frac{\partial^{N_2+N_3}F(x,\tau)}{\partial x^{N_2}\partial\tau^{N_3}}$$

が H のノルムに関して，$x\in R^n, \tau\in[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ で一様に有界であることを意味する．二つの函数は差が零に同値であるとき，等しいということにする．

結局 (x, t) の函数は無限回微分可能で，微係数が $D(A^\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A^n)$ に属する部分空間で類別されたことになる．またわれわれは Banach 空間，あるいは可算ノルム空間に値をとる函数を考える．この場合も，無限回微分可能でその微係数が $D(A^\infty)$ に属する函数を零と同値であるとして類別して考察する．

以下において，Banach 空間や可算ノルム空間に値をとる函数に関する等号は前述の類別した意味での等号である．さらに $f(x, t, h)$ が N 回可微分であるとは，f の (x, t) についての N 階までの微係数が $h\to 0$ のとき，一様有界であることを意味する．

さて，$\alpha\in\Gamma, h$ の函数で $h=0$ の近傍で定義された C^∞ 函数 $e^i(\alpha, h)$ を考えよう．漸近的な意味で

$$\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}e^i(\alpha, h)=\sum_{j=0}^{\infty}h^j\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}e_j{}^i(\alpha)+O(h^\infty) \tag{1.13}$$

とする．さらに $e^i(\alpha, 0)=e^i(\alpha)$ $(i=1, 2, \cdots, N)$ は地図帳 $\mathscr{H}$ に関する 1 の分解とする．$K_{1/h, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0}\varphi(\alpha)$ の表現において $e^i(\alpha)$ を $e^i(\alpha, h)$ で置き換えよう．$e^i(\alpha, h)$ に依存する作用素の族を得る．それらを

$$K_{1/h, \Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}, \qquad \tilde{K}_{1/h, \Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}, \qquad \tilde{\tilde{K}}_{1/h, \Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}, \cdots$$

と表わそう．これらの一連の作用素は $O(h)$ の差をもって等しい．すなわち

$$\tilde{K}_{1/h, \Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}\varphi(\alpha)=\tilde{\tilde{K}}_{1/h, \Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}\varphi(\alpha)[1+O(h)].$$

同様に $K_{A, \Gamma, R_z}^{\gamma, \alpha_0}$ も定義できる．ここで A は正定値作用素で $R_z=(A-z)^{-1}$ である．この場合は (1.13) において h を R_z で置き換えねばならない．$e^i(\alpha, R_z)$ の α に関する微係数はパラメーター α に依存する H 上の有界作用素となる．

また可算ノルム空間が Banach 空間 B_i $(i=1, 2, \cdots; B_i\supset B_{i+1})$ の共通集合で，作用素 A が第 1 章 §1-4° における条件を満たしているならば $e^i(\alpha, R_z)$ は $B^\infty=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$ における連続作用素となり ($e^i(\alpha, 0)$ はスカラー函数でもともとの 1 の分解)，同様のことが成り立つ．

6° Cauchy 問題の解の準古典的漸近形

$v(x,t)\in C^\infty, \varphi(\alpha)\in C^\infty$ かつ有界な台をもつと仮定しよう．そのとき Schrödinger 方程式

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+v(x,t)\right]\psi=\hat{H}\psi \tag{1.14}$$

の解 $\psi(x,t)$ で初期条件

$$\psi(x,0)=K_{1/h,\Gamma,h}^{\gamma^0,\alpha^0}\varphi(\alpha) \tag{1.14$'$}$$

を満たすものは次のように表わされる：

$$\psi(x,t)=K_{1/h,\Gamma_t,h}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha) \tag{1.15}$$

ここで $\Gamma_t=\{Q(\alpha,t),P(\alpha,t)\}$, $\Gamma_0=\Gamma$, $\mu\dot{Q}=P$, $\dot{P}=-\partial v/\partial Q$ であり，

$$\gamma=\gamma^0-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\,Q(\alpha^0;0,t)+\frac{1}{h}\int_0^t\left\{\frac{P^2(\alpha^0,\tau)}{2\mu}-v[Q(\alpha^0,\tau),\tau]\right\}d\tau.$$

6.1. 例　具体的な場合に Schrödinger 方程式の解に対する漸近形を記述しよう．

初期条件(1.14)′が次の形をしているとしよう．

$$\psi(x,0)=\varphi(x)\exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\}. \tag{1.16}$$

$\varphi(x)$ の台は $[-1,1]$ に含まれており，$f(x)\in C^2$, $f(0)=0$ とする．初期条件(1.16)は $\Gamma=\{q^0(\alpha)=\alpha, p^0(\alpha)=f'(\alpha)\}$, $\alpha\in[-1-\varepsilon,1+\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$, $\alpha^0=0, \gamma^0=0$ とすると(1.14)′の型である．正準地図帳は一つの非特異地図から成っており，$e^1(\alpha,h)=1$ $(-1\leqq\alpha\leqq1)$ である．

直線 $q=x$ は曲線 $\Gamma_t=\{Q(\alpha,t),P(\alpha,t)\}$ と $x\in(x'-\delta,x'+\delta)$ においては有限個の非特異点 $\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^k$ で交わるものとしよう．γ^j を道 $Q(\alpha^j,0,t)$ の指数，すなわち，函数 $\left.\dfrac{\partial Q(\alpha,\tau)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^j}$ の $0\leqq\tau\leqq t$ における零点の数とする．$S(\alpha^j,t)$ は方程式

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\mu}{2}\dot{Q}^2-v(Q,t)$$

の $S(\alpha^j,0)=f(\alpha_j)$ を満たす解とする．$f(\alpha)=\displaystyle\int_{l_0[0,\alpha]}p\,dq$ であり，また

$$S(\alpha, t) = \int_{l_0[0,\alpha]} p\,dq + \int_0^t \left\{ \frac{P^2(\alpha,\tau)}{2\mu} - v[Q(\alpha,\tau),\tau] \right\} d\tau$$
$$= \int_0^t \left\{ \frac{P^2(0,\tau)}{2\mu} - v[Q(0,\tau),\tau] \right\} d\tau + \int_{l_t[0,\alpha]} p\,dq$$

であるから，解は

$$\psi(x,t) = \sum_{j=1}^{k} \exp(-i\pi\gamma^j/2)\varphi(\alpha^j(x,t)) \left| \frac{\partial Q}{\partial \alpha}(\alpha^j(x,t),t) \right|^{-1/2} \exp\left\{ \frac{i}{h} S(\alpha^j(x,t),t) \right\}$$
$$+ h\Phi(x,t,h) \tag{1.17}$$

と表現される．ここで $\Phi(x,t,h)$ は $h\to 0$ のとき $x=x'$ の近傍の点で有界である．この結果は二つの異なった方法で書き直すことができる．

1)　点 (x,t) は汎函数

$$\phi(q) = f(q^0) + \int_{q^0}^{(x,t)} \left\{ \frac{\dot{q}^2}{2\mu} - v(q,\tau) \right\} d\tau \tag{1.18}$$

のすべての極値に対して焦点ではないとしよう．すなわち

$$\mu\ddot{q} = -\frac{\partial v}{\partial q}$$
$$\mu\dot{q}(0) = f'(q(0)), \qquad q(t) = x \tag{1.19}$$

を満たすすべての解に対して $dq(0,x)/dx \neq \infty$ と仮定しよう．このとき，(1.19)は有限個の解 $q_1(\tau), q_2(\tau), \cdots, q_k(\tau)(0\leqq\tau\leqq t)$ をもち

$$\psi(x,t) = \sum_{\nu=1}^{k} \exp\left\{ -i\frac{\gamma_\nu}{2}\pi \right\} \varphi(q_\nu(0)) \left| \frac{dq_\nu(0)}{dx} \right|^{1/2} \exp\left\{ \frac{i}{h}\phi(q_\nu(\tau)) \right\} + O(h) \tag{1.20}$$

と表わされる．ここで γ_ν は道 $q_\nu(\tau)$ の $0<\tau\leqq t$ における焦点の数である．

2)　方程式 $\mu\ddot{X} = -\dfrac{\partial v}{\partial X}(X,t)$ の解が条件

$$X(0) = x_0, \qquad \mu\dot{X}(0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

を満たしているとしよう．方程式 $X(x_0,t)=x$ の解の集合 $M(x)$ を考えよう．もし $M(x)$ が焦点$\left(\text{すなわち}\ \dfrac{\partial X}{\partial x_0}(x_0,t)=0\ \text{となる点}\right)$を含んでいないならばそれは有限個の $x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^k$ からなり $x_0^i(x,t)$ と (x,t) の函数として表示できる(図8参照)．γ^j を道 $X(x_0^j,0,t)$ の指数，すなわち $\dfrac{\partial X}{\partial x_0}(x_0^j,\tau)(0<\tau\leqq t)$ の零点の個数，$S(x_0,t)$ を方程式

$$\frac{dS}{dt} = \mu\frac{\dot{X}^2}{2} - v(\dot{X},t), \qquad S(x_0,0) = f(x_0)$$

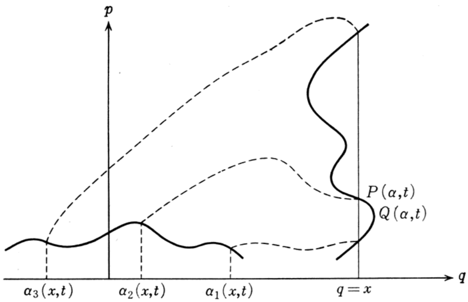


図8 $\alpha_i(x,t)\,(i=1,2,3)$ は $Q(\alpha,t)=x$ の解.

の解とする. このとき

$$\psi(x,t)=\sum_{j=1}^{k}\exp(-i\pi\gamma^j/2)\varphi(x_0{}^j(x,t))\left|\frac{\partial X}{\partial x_0}(x_0{}^j(x,t),t)\right|^{-1/2}$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{h}S(x_0{}^j(x,t),t)\right\}+O(h) \tag{1.21}$$

が成り立つ.

直線 $q=x'$ と曲線 $\Gamma_t=\{Q(\alpha,t),P(\alpha,t)\}$ の交わりは区間 $p'\leqq p\leqq p''$ にあり, p 軸へ射影可能としよう. したがって $p\in(p'-\varepsilon,p''+\varepsilon)$ に対しては $P(\alpha,t)=p$ より $\alpha=\alpha(p,t)$ を得る. そのとき $\psi(x,t)$ は

$$\psi(x,t)=\frac{\exp\left\{-\frac{\pi i}{2}\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\right\}}{(2\pi h)^{1/2}}\int_{p'-\varepsilon}^{p''+\varepsilon}F(p)\exp\left\{i\frac{p}{h}[x-Q(\alpha(p,t),t)]\right\}$$

$$\times\left|\frac{\partial p}{\partial\alpha}(\alpha(p,t),t)\right|^{-1/2}\exp\left[\frac{i}{h}S(\alpha(p,t),t)\right]dp+\sqrt{h}\,\Phi(x,t,h)^{1)} \tag{1.22}$$

と表示できる. ここで $F(p)$ は $p'\leqq p\leqq p''$ で 1 に等しく $p'-\varepsilon\leqq p\leqq p''+\varepsilon$ の外では零になる滑らかな函数, γ は軌道 $Q(\alpha(p,t);0,t)$ の $p\in[p',p'']$ における焦点の数である. $\Phi(x,t,h)$ は $h\to 0$ のとき $x=x'$ の近傍において一様有界である.

もし $p'=p''$ で, 点 $q=x'$ が特異点のときには, 被積分函数を $p=p'$ で展開し, その第1項をとることにより簡易化できる(Федорюк[1]).

7° 方程式系の漸近解

一般的な場合は, 多様体 Γ 上の函数 $\varphi(\alpha)$ は Banach 空間 B に値をとる Boch-

1)〔訳注〕 訳者には $h\Phi(x,t,h)$ となるように思われる.

ner 可積分函数となる．多くの具体的な場合は，B は有限次元である(表1を参照)．例として，方程式

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + hR(x,t)\psi + v(x,t)\psi \tag{1.23}$$

を考えよう．ここで $R(x,t)$ は有界かつ滑らかな $\gamma\times\gamma$ 行列，$v(x,t)\in C^\infty$ とする．

$$\psi(x,0) = K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\varphi(\alpha)l(\alpha) \tag{1.24}$$

とし，$\varphi(\alpha)$ は有界な台をもち $l(\alpha)=\{l_1(\alpha),\cdots,l_\gamma(\alpha)\}$ で $|l(\alpha)|=1$ とする．このとき

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t,h}\varphi(\alpha)\exp\left\{i\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]d\tau\right\}l(\alpha)+O(h) \tag{1.25}$$

と表わされる．ここで $\exp\left\{i\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]d\tau\right\}l(\alpha)=f(\alpha,t)$ は

$$\frac{df(\alpha,t)}{dt} = iR[Q(\alpha,t),t]f(\alpha,t), \qquad f(\alpha,0)=l(\alpha)\in B \tag{1.26}$$

を満たすベクトル函数で，Γ_t, Q, P はすでに述べた結果において定義されたものである．また

$$\gamma = \frac{1}{h}\int_0^t\left\{\frac{\mu\dot{Q}^2(\alpha^0,\tau)}{2} - v(Q(\alpha^0,\tau),\tau)\right\}d\tau - \frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\,Q(\alpha^0;0,t)$$

である．

8° 双曲型方程式系の解の特異性のふるまい

1. 双曲型方程式の解の不連続性を記述する漸近展開を得るために，正準作用素 $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,h}$ において $A=i\partial/\partial\tau$ の場合(第1章§1-6° 参照)，すなわち A が正値でない場合を考えねばならない．

作用素 A が負の場合は

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma} = (K^{\gamma,\alpha^0}_{-A,\Gamma})^* \qquad (\text{複素共役})$$

で定義する．もし A が半定値でなければ，空間 H を $H=H^+ + H^-$ と正負に対応する部分空間にわけ，A を H^+ に制限したものを A^+, $-A$ を H^- に制限したものを A^- として，おのおのに対して定義すればよい．

$$\varphi(\alpha) = \varphi^+(\alpha)+\varphi^-(\alpha), \qquad \varphi^+(\alpha)\in H^+, \qquad \varphi^-(\alpha)\in H^-$$

とすると

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}\varphi(\alpha) = K^{\gamma,\alpha^0}_{A^+,\Gamma}\varphi^+ + (K^{\gamma,\alpha^0}_{A^-,\Gamma})^*\varphi^-$$

である．たとえば $A=id/d\tau$ を $H=L_2(-\infty,\infty)$ で考える．$\Gamma=\{p=0\}, \varphi(\alpha)=\delta(\tau)\otimes f(q)$ とする．$\delta(\tau)=\delta_+(\tau)+\delta_-(\tau)$，$\delta_+(\tau)=\int_0^\infty e^{i\lambda\tau}d\lambda$，$\delta_-(\tau)=\delta_+(\tau)^*$ であるから[1])

$$K_{id/d\tau,A}^{\gamma,\alpha^0}f(q)\delta(\tau)=2f(x)\mathrm{Re}\,e^{i\gamma}\delta_+(\tau)$$

となる．

2. 簡単な場合に，双曲型方程式の解の不連続性を調べることにしよう．$u(x,y,t)$ を方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2(x,t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{1.27}$$

および初期条件

$$u(x,y,0)=\delta(y-y_0)\varphi(x) \qquad u_t(x,y,0)=0 \tag{1.28}$$

を満たす解とする．ここで $\varphi(x)$ はコンパクトな台をもつ滑らかな函数，$A=i\partial/\partial y$ とする．このとき A-特性方程式は

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-c^2(x,t)\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+1\right)=0$$

である．これは二つの根

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t}=(-1)^\nu c(x,t)\sqrt{\left(\frac{\partial S^\nu}{\partial x}\right)^2+1} \qquad (\nu=1,2)$$

をもつ．$Q^\nu(\alpha,t), P^\nu(\alpha,t), S^\nu(\alpha,t), (\nu=1,2)$ を微分方程式系

$$\begin{aligned}\dot{p}^\nu&=(-1)^\nu\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q}^\nu=(-1)^{\nu+1}\frac{\partial H}{\partial p},\ (H=c(q,t)(p^2+1)^{1/2})\\ \dot{s}^\nu&=(-1)^\nu[H-p^\nu Hp_\nu]=(-1)^\nu\frac{c(q,t)}{\sqrt{p^2+1}}\end{aligned} \tag{1.29}$$

において，初期条件

$$q^\nu(0)=\alpha, \qquad p^\nu(0)=0, \qquad s^\nu(0)=0$$

を満たす解とする．Cauchy 問題(1.27)，(1.28)の解は

$$u(x,y,t)=\sum_{\nu=1,2}K_{i\frac{\partial}{\partial y},\Gamma_t{}^\nu}^{\gamma^\nu,\alpha^0}\varphi(\alpha)\delta(y-y_0)+F(x,y,t)$$

ここに $F(x,y,t)\in L^2, \Gamma_0{}^\nu$ は多様体 $p=0, \Gamma_t{}^\nu$ は方程式系(1.29)の解 $\{Q^\nu(\alpha,t), P^\nu(\alpha,t)\}$ による $p=0$ の像，$\gamma^\nu(t)=-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\,Q^\nu[\alpha^0;0,t]+AS^\nu(\alpha^0,t)$，と表わすことができる．

1)　超函数についてはГельфанд-Щилов[1].

さらに(x,t)が$Q^\nu(\alpha,t)\,(\nu=1,2)$のいずれの焦点でもなければ，方程式

$$Q^\nu(\alpha,t)=x$$

を満たす有限個の解$\alpha_j{}^\nu(x,t)\,(j=1,2,\cdots,k^\nu)$があって

$$u(x,y,t)=\sum_{\nu=1}^{2}\sum_{j=1}^{k^\nu}\frac{\varphi(\alpha_j{}^\nu)}{\sqrt{\left|\dfrac{\partial Q^\nu}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_j{}^\nu}}}\mathrm{Re}\,\exp(-i\pi\gamma_j{}^\nu/2)\delta_+(y-y_0+S(\alpha_j{}^\nu,t))$$
$$+F(x,y,t),\qquad F(x,y,t)\in L_2$$

と表わすことができる．このことより，もし$Q^\nu(\alpha_j,0,t)$の焦点の数が奇数ならば特異点の型は1位の極型であり，偶数ならばδ函数型である．

§2　多次元の場合

多次元の場合も1次元の場合と同様な方針で考察しよう．

1°　位相的命題

$2n$次元相空間(q,p)におけるn次元多様体$\Gamma=\{q(\alpha),p(\alpha)\}$，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$を考えよう．さらに$\Gamma$はLagrange部分多様体，すなわち微分型式$dp\wedge dq$が$\Gamma$上で零となるとしよう．このことは積分$\int pdq$が局所的には道に依らないことを意味している．

$Dq/D\alpha=0$となる集合Mを特異，あるいは$p=0$への射影に関して特異ということにする．

Lagrange部分多様体$\Gamma=\{q(\alpha),p(\alpha)\}$は次の注目すべき性質をもっている．それにより，正準作用素を多次元の場合にも拡張することが可能となるのである．この性質を局所座標に関する補題として述べよう．

補題 2.1　Lagrange部分多様体Γ上の任意の点α^0に対して，座標軸の回転$\tilde{q}=Aq,\tilde{p}=Ap$があり，それにより$\alpha^0$のある近傍は$n$次元平面$\tilde{q}_1=\cdots=\tilde{q}_k=\tilde{p}_{k+1}=\cdots=\tilde{p}_n$に射影可能である．

次のことを注意しておこう．直交行列Aに対して

$$\begin{aligned}\tilde{q}&=Aq\\ \tilde{p}&=Ap\end{aligned}\tag{2.1}$$

なる変換は正準変換である．つまり$dp\wedge dq$を不変にする変換である．座標$\tilde{y}_k=(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2,\cdots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\cdots,\tilde{q}_n)$を点$\alpha$における焦点座標といい，そこでは

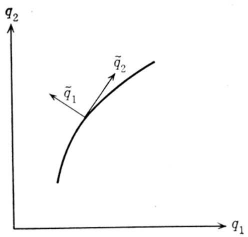


図 **9–a**

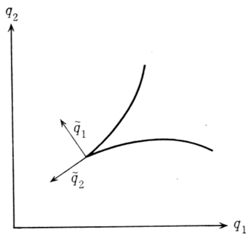


図 **9–b**

$D\tilde{y}_k/D\alpha \neq 0$ である．たとえば 2 次元の場合，補題は次のことを主張している．

もし $\|\partial q_i/\partial \alpha_j\|$ の階数が零であれば $\det\|\partial p_i/\partial \alpha_j\| \neq 0$ である．もし $\|\partial q_i/\partial \alpha_j\|$ の階数が 1 で，Γ が一般的な位置にあれば M の q 平面への射影は曲線 γ となる(図 9 参照)．この場合 $\tilde{q}_1$ を γ と直交するように，$\tilde{q}_2$ を接するようにとる．このとき補題は $\alpha \in M$ の適当な近傍が $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_2)$ 平面のある近傍と微分同型であることを主張している．

2. 補題 2.1 は Lagrange 部分多様体の局所座標を選ぶのに用いる．つまり $\Gamma \ni \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ に対して焦点座標として $\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \cdots, \tilde{q}_n$ を選ぶことができる(一般の部分多様体では不可能である)．したがって Lagrange 部分多様体 Γ は $(\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \cdots, \tilde{q}_n)$ が局所座標に選べるような開集合 $\tilde{\Omega}_k{}^l$ でおおうことができる．特に $\tilde{\Omega}_k{}^l$ の中に

$$\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial \alpha_i} = \cdots = \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial \alpha_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

となるような点 α が存在するようにできる．このような点を各 $\tilde{\Omega}_k{}^l$ の中から勝手に一つ選んで中心点とよぶことにし，その中心点全体を $\mathscr{X}$ と表わす．$\tilde{\Omega}_0{}^l$ に対しては勝手に一つ選ぶとする．このように Γ の‘正準地図帳’$\mathscr{H}$ とその中心点の集合 $\mathscr{X}$ を定める．

$J\left(\dfrac{q_1, q_2, \cdots, q_n}{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}\right) \neq 0$ となる点を非特異，$J\left(\dfrac{q_1, q_2, \cdots, q_n}{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}\right) = 0$ となる点を特異ということにする．

Lagrange 多様体上の道 $l[\alpha^1, \alpha^2]$ に対して，その指数を定義しよう．p 軸に平行な射影に関して一般的な位置にあると仮定する．このとき，特異点の集合 M の次元は $(n-1)$ 以下である．行列 $\|\partial q_i(\alpha)/\partial \alpha_j\|$ の階数が $(n-2)$ 以下の点の

集合の次元は$(n-2)$より小さい[1]．

$\alpha^0\in M$を固定しよう．(2.1)の型の座標回転で，$\tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \cdots, \tilde{q}_n$を焦点座標として選べたとしよう．いいかえれば正準地図帳として，α^0を中心点にもつものを選ぶのである．局所的には$\tilde{q}_1=\tilde{q}_1(\tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \cdots, \tilde{q}_n)$と表示することができる．$\alpha^0$において接ベクトル$\vec{e}$を$\tilde{p}_1$と平行に，向きを$\partial\tilde{q}_1/\partial p_1$が－から＋へ変る方向へ引こう．一般的な位置にあるときα^0を越える際$\partial\tilde{q}_1/\partial\tilde{p}_1$は符号を変える[2]．

われわれは部分多様体M上に法ベクトル場を構成したのである．

α^1とα^2を非特異点であるとしよう．道$l[\alpha^1, \alpha^2]$の指数を，この道とMとの交わり数(intersection number)でもって定義しよう．道が$\vec{e}$の方向に1回横切ると指数は一つ増え，$\vec{e}$と逆向きに横切ると一つ減ることになる．

道の指数の別の定義を与えよう．それは一般的な位置においてはMの次元は$(n-1)$を越えないという事実を用いる．α^1とα^2は同じ地図$\tilde{\Omega}_k$に属しているとし，それらは非特異であるとする．われわれは道の指数を行列

$$B_k=\left\|\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial\tilde{p}_i}\right\|_{i,j\leq k}=\left\|\frac{\partial^2 S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial\tilde{q}_i\partial\tilde{q}_j}\right\|_{i,j\leq k}^{-1}$$

の点$\alpha=\alpha_1$における慣性指数(index of inertia)と$\alpha=\alpha_2$におけるそれとの差でもって定義する．もしα''が地図$\tilde{\Omega}_k{}^i$の中心点で，α'が非特異点であるならば，道$l[\alpha', \alpha'']$の指数はα'におけるB_kの慣性指数に等しい．

定理 2.1　$\operatorname{Ind} l[\alpha', \alpha''], l[\alpha', \alpha'']\subset\tilde{\Omega}_{k_1}$，は地図のとり方に依らない．すなわち，もし$l[\alpha', \alpha'']\subset\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$で，$\alpha'$と$\alpha''$が非特異ならば

$$\operatorname{Ind}\tilde{B}_{k_1}(\alpha')-\operatorname{Ind}\tilde{B}_{k_1}(\alpha'')=\operatorname{Ind}\tilde{\tilde{B}}_{k_2}(\alpha')-\operatorname{Ind}\tilde{\tilde{B}}_{k_2}(\alpha'') \qquad (2.2)$$

が成り立つ．

一般の道$l[\alpha', \alpha'']$に対してはそれを分割して，各分割された道に対して定義された指数を加えて，道$l[\alpha', \alpha'']$の指数を定義する[3]．定理2.1より分割のしかたによらず，また道$l[\alpha', \alpha'']$を連続的に$\hat{l}[\alpha', \alpha'']$に変形しても変らない．す

1)　もし行列$\|\partial q_i(\alpha)/\partial\alpha_j\|$の階数が$(n-r)$，$\Gamma$が一般的な位置にあれば$\dim M=n-r^2$である(Abraham[1])．しかし定理の証明においては$\dim M\leqq n-1$であるという事実しか使わない．一般的な位置にある部分多様体の他の性質は説明のためにのみ用いる．

2)　このことに関連してД. Аносов と С. Новиков により道の指数の簡単な幾何学的解釈が与えられた．〔なお Арнольд [a]を見よ．〕

3)　特異部分多様体の次元が$(n-1)$以下であるという条件，たとえばΓが射影に関して一般の位置にあることが成り立っておればよい．このことは十分小さい正準回転で可能である．

なわち $\mathrm{Ind}\, l[\alpha', \alpha'']$ はホモトピー不変である.

定理 2.2 1次元輪体(cycle)の指数は無限小正準変換で不変な整数である.

$\{q(t), p(t)\}$ は Hamilton 系 $\dot{q}=H_p$, $\dot{p}=-H_q$, の解で, 初期条件 $q(0)=q^0(\alpha)$, $p(0)=p^0(\alpha)$ を満たしているとする. ここで $\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ は Lagrange 部分多様体 Γ を定義しているとする. $q(t)=Q(\alpha, t)$, $p(t)=P(\alpha, t)$ とおく. 部分多様体 $\Gamma_t=\{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$ も相空間において Lagrange 部分多様体である. すべての道 $l[\alpha', \alpha'']\subset\Gamma$ は $l_t[\alpha', \alpha'']\subset\Gamma_t$ へ写像される. 軌道 $Q(\alpha; 0, t)$ の指数を定義しよう. まず2次形式 $\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j$ が正定値であると仮定する. この場合 Jacobi 行列式 $\partial Q(\alpha, \tau)/\partial\alpha$ の $0<\tau\leqq t$ における零点の個数は重複度をこめて有限である. これを軌道 $Q(\alpha; 0, t)$ の指数とよぶことにする(Morse の指数). 次に条件 $\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j>0$ を満たさない Hamilton 函数に対して道の指数を定義しよう. $(2n+1)$ 次元 (q, p, t) 空間において $(n+1)$ 次元の '膜(多様体)' $R_t=\bigcup_{0\leqq\tau\leqq t}\Gamma_\tau$ を考えよう. 補題より, R_t の各点において非退化行列 $\tilde{B}_k$ が存在する. したがって R_t を $(n+1)$ 次元正準地図でおおうことができる. われわれはこの膜 R_t 上の道の指数(それは軌道 $Q(\alpha; 0, t)$ の指数も含む)を定義しよう. 一つの正準地図 $\tilde{\Omega}_k$ に完全に含まれる道 $l[\alpha^1, \alpha^2]$ を考える. $\tilde{\Omega}_k$ においては $(\tilde{y}_k, t)$ を局所座標とする. 両端 α^1, α^2 が非特異の場合は, Lagrange 多様体の場合と同様に $\mathrm{Ind}\, l[\alpha^1, \alpha^2]$ を α^1, α^2 における行列 $\tilde{B}_k$ の慣性指数の差として定義する. 前と同様に地図の中心点を定め, 道 $l[\alpha_k{}^1, \alpha^2]$ において $\alpha_k{}^1$ は中心点, α^2 は非特異とすれば $\mathrm{Ind}\, l[\alpha_k{}^1, \alpha^2]$ を α^2 における行列 $\tilde{B}_k$ の慣性指数でもって定義する.

不変性に関する定理は第7章において証明する. またそこにおいて任意の二つの点を結ぶ道に対する指数も定義される. 定理 2.1 と類似の定理が成り立ち R_t 上の任意の道に対する指数は加法的に定義される. 道が軌道 $Q(\alpha; 0, t)$ のとき, 条件 $\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j>0$, $z\neq 0$ のもとでは, 定義された指数は Morse の指数に等しいことを示す.

2° 正準作用素の定義

Lagrange 多様体 Γ 上に Hilbert 空間の値をとるコンパクトな台 R をもつ函数 $\varphi(\alpha)\in C^\infty$ が与えられているとしよう. $\varphi(\alpha)$ でもって商空間 S の同値類を表わす. $\mathscr{H}$ でもって正準地図 $\{\Omega^i\}_{i=1,2,\cdots,N}$ からなる R をおおう被覆を表わす. $e^i(\alpha)$ で対応する1の分解を表わす(すなわち $e^i(\alpha)\in C^\infty$, $\sum_{i=1}^{N} e^i(\alpha)=1\,(\alpha\in R)$, $e^i(\alpha)$

$=0, \alpha \notin \Omega^i$). 局所地図 $\tilde{\Omega}_k{}^i$ においては $\alpha = a^i(\tilde{y}_k)$, $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \cdots, \tilde{q}_n$ と表わせることを思い起しておこう．$\sigma(\alpha)$ を多様体 Γ 上のある測度とし，$D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k$ でもって $\sigma(\alpha)$ の測度 $d\tilde{p}_1 \cdot \cdots \cdot d\tilde{p}_k \cdot d\tilde{q}_{k+1} \cdot \cdots \cdot d\tilde{q}_n$ に関する微分を表わす．特に Γ 上に大域的な座標 α を導入することが可能なとき，たとえば $\sigma(\alpha) = d\alpha_1 \cdots d\alpha_n$ とおくことができ，$D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k = D\alpha/D\tilde{y}_n \equiv \det\|\partial\alpha_i/\partial\tilde{y}_k\|$ となる．$\alpha_k{}^i$ を地図 $\tilde{\Omega}_k{}^i$ の中心点とし，そのうちの一つを'始点'とよぶことにして α^0 で表わす．また n 次元空間 $q=x$ と交わる地図の番号の全体を $j(x)$ で表わす．A を Hilbert 空間 H における正定値非有界自己共役作用素とする．S を商空間 $L_2[\Gamma, H]/D(A) \cap D(\partial/\partial\alpha)$, S' を商空間 $L_2[R, H]/D(A) \cap D(\partial/\partial x)$ とする．正準作用素 $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ を S から S' への写像として定義する．この作用素は $L_2[\Gamma, H]$ から商空間 S' への作用素とみなすことができる．別の表現を使うと，$\varphi(\alpha) \in L_2[\Gamma, H]$ に対して $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)$ を微分可能かつ $D(A)$ に属する元を法として定義するのである．

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha) = e^{i\gamma}\sum_{j\in j(x)}\exp\left\{-\frac{\pi i}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_k{}^j]\right\}\Phi^{\tilde{p}_k}e^j(\alpha^j(\tilde{y}_k))\left|\frac{D(\sigma)}{D\tilde{y}_k}\right|^{1/2}$$

$$\times\exp\left\{iA\left[\int\tilde{p}\,d\tilde{q} - \sum_{i=1}^{k}\tilde{p}_i\tilde{q}_i(\alpha^j(\tilde{y}_k))\right]\right\}\varphi(a^j(\tilde{y}_k))\Big|_{q=x} \qquad (2.3)$$

とする．$\Phi^{\tilde{p}_k}$ は最初の k 変数に関する Fourier 変換

$$\Phi_A{}^{\tilde{p}_k}\psi(\tilde{y}_k) = \frac{e^{i\pi k/4}A^{k/2}}{(2\pi)^{k/2}}\int\exp\left[iA\sum_{j=1}^{k}\tilde{p}_j\tilde{q}_j\right]\psi(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \cdots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \cdots, \tilde{q}_n)d\tilde{p}_1\cdots d\tilde{p}_k$$

であり，γ は A のある線型函数である．もし A が負定値であるならば

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} = K_{-A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \text{ の複素共役作用素} \qquad (2.4)$$

と定義する．もし作用素 A の符号が不定で，A^{-1} が存在するときは第2章§1-8° と同様に定める[1)]．

定理 2.3 正準作用素 $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ が正準地図帳，道 $l[\alpha^0, \alpha_k{}^j]$, 1 の分解に依らないための必要十分条件は，$A$ のスペクトル点 λ が

$$\frac{2\lambda}{\pi}\oint_k p\,dq = l_k(\mathrm{mod}\ 4) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (k = 1, 2, \cdots, k_0) \qquad (2.5)$$

1) 以下に述べる定理 2.4 において Hilbert 空間 H の代わりに Banach 空間 B で，作用素 A が第6章§1 の性質 1), 2), 3) を満たす場合も扱える．もし A が 1), 2 a), 3) の性質をもつならば $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ は (2.4) で定義できる．A が 1), 3) を満たし，さらに $B = B^+ \oplus B^-$, $R_A B^\pm \subset B^\pm$ で，A は B^+ で 1), 2), 3) を満たし，B^- で 1), 2 a), 3) を満たすならば，$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ は第2章§1-8° の方法で定義できる．

を満たすことである．$\oint_k pdq$ は k 番目の基本輪体上の積分，l_k はそれの指数，k_0 は 1 次元 Betti 数である．条件(2.5)は $I_k=\oint_k pdq$ の値を制限している．$k_0=2$ のとき(2.5)が成り立つような A が存在するためには I_1 と I_2 が共通約数をもたぬことが十分条件となる．

$\oint_k pdq$ および l_k は正準変換に関して不変であるから，$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ の性質も正準変換に関して不変である．もし始点 α^0 を他の点 $\tilde{\alpha}^0$ に変えれば，γ を

$$\tilde{\gamma}=\gamma+A\int_{\alpha^0}^{\tilde{\alpha}^0} pdq-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\, l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0]$$

とすれば，正準作用素は不変である．

注意 $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)$ の $x=\bar{x}$ の近傍での値を実際に求めるには次に述べるような地図帳 $\mathscr{H}(\bar{x})$ がよい．$q=\bar{x}$ と Γ との交わりが有限個の点 $\alpha^i(\bar{x})(i=1,2,\cdots,i_0)$ から成っているとする．これらの各点がどれかの地図 $\tilde{\Omega}_k{}^i(\bar{x})$ の中心点となっているように $\mathscr{H}(\bar{x})$ を選ぶ．このとき地図帳 $\mathscr{H}(\bar{x})$ に対応する正準作用素は $x=\bar{x}$ の近傍で i_0 項から成る．

さらに条件(2.5)が成り立てば

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)=K_{A,\Gamma}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0}\varphi(\alpha), \qquad \tilde{\gamma}=-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\, l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0]+A\int_{\alpha^0}^{\tilde{\alpha}^0} pdq$$

である．

作用素の空間 S における不変性に対する条件(2.5)および I_k の不変性は Hamilton の力学系にそう変換 $\Gamma\to\Gamma_t$ に対して不変である．

われわれは $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ が空間 S において正準地図帳の分割の仕方などに依らないこと，すなわち条件(2.5)が成り立つことを仮定する．$\varphi(\alpha)(\alpha\in\Gamma)$ をある可算ノルム空間に値をもつ滑らかな函数としよう．$e^i(\alpha,h)$ は線型連続作用素で $\alpha\in\Gamma, h\in(0,1)$ で定義され，道 $l[\alpha_0,\alpha]$ に依存し，α と h について滑らかで(1.13)が成り立つものとする．$h=0$ において $e^i(\alpha,0)=e^i(\alpha)$ は地図帳 $\mathscr{H}$ に関する 1 の分解とする．§1-5° と同様に $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ において，$e^i(\alpha)$ を $e^i(\alpha,R_z)$ でおきかえると $K_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}, \tilde{K}_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}, \tilde{\tilde{K}}_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}$ と $e^i(\alpha,R_z)$ に依存する作用素の族を得る．

定理 2.4 Γ を正準地図帳 $\mathscr{H}$ と始点 α^0 をもつ Lagrange 多様体とする．また，$K_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}$ を上述の作用素とする．$\tilde{\mathscr{H}}$ を Γ の別の正準地図帳とし，$\tilde{\alpha}_0$ を別の始点とする．このとき作用素 $\tilde{K}_{A,\Gamma,R_z}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0}$ が存在して，任意の $\varphi(\alpha)\in C_0{}^\infty[\Gamma]$ に対し

て

$$\tilde{K}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0}_{A,\Gamma,R_z}\varphi(\alpha)=K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,R_z}\varphi(\alpha)$$

が成り立つ．ここで

$$\tilde{\gamma}=\gamma-\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0,\tilde{\alpha}^0]+A\int_{\alpha^0}^{\tilde{\alpha}^0}pdq$$

である．

第3章　偏微分方程式の解の漸近形

§1　準古典近似

1° 基本定理

1. 第2章§1-4° において得られた定理と類似の命題が成り立つ.

定理 3.1 Γ をコンパクト Lagrange 多様体で次の力学系に関して不変なものとする.

$$\dot{x}_i = p_i;\quad \dot{p}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i},\qquad (i=1,\cdots,n),$$

$$v(x)\in C^\infty,\ \lim_{|x|\to\infty}\frac{v(x)}{\sqrt{|x|^\alpha}} = \infty,\ (\alpha>0),\ \frac{p^2}{2}+v(x)=E.$$

このとき，次の方程式

$$\{-\Delta+\lambda_N{}^2[v(x)-E]\}\psi_N = 0,\qquad \psi_N\in L_2[\boldsymbol{R}^n]$$

の固有値 λ_N で関係(2.5)を満たすものが存在する[1].

2. 定理 3.2 第1章(1.6)式の Schrödinger 方程式の係数 $v(x,t)$ は $[n/2]+4$ 回微分可能とし，$\varphi(\alpha)$ は2回微分可能な函数とする．方程式(1.6)の解 $\psi(x,t)$ で初期条件

$$\psi(x,0) = K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma}\varphi(\alpha) \tag{1.1}$$

$$\Gamma=\{q^0(\alpha),p^0(\alpha)\},\ x=(x_1,\cdots,x_n);\ p=(p_1,\cdots,p_n)$$

を満たすものは，次の漸近形をもつ.

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha_t{}^0}_{1/h,\Gamma_t}\varphi(\alpha)+z_h(x,t), \tag{1.2}$$

$$\gamma = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind}Q(\alpha^0;0,t)+\frac{1}{h}\int_0^t\left\{\frac{P^2(\alpha^0,\tau)}{2\mu}-v[Q(\alpha^0,\tau),\tau]\right\}d\tau.$$

---

1)　たとえば，$E=E_n{}^0$, $\lambda_N=1/h$ に対して，

$$\oint_k p\,dq = 2\pi(m_k+l_k/4)h+O(h^2),\qquad (k=1,\cdots,k_0).$$

ここで k_0 は Γ の Betti 数，$\oint_k$ は独立な道に沿っての積分，l_k はその指数，m_k は自然数である．この公式は，物理学においては，Bohr–Sommerfeld の公式，または，前期量子化条件とよばれている．しかし，物理学の文献では，l_k の意味については解説されていない．l_k については，$l_k\leqq 4$ のみが知られている．(Sommerfeld[2], Born[1]を参照せよ.)

ここで，$Q(\alpha,t), P(\alpha,t)$ は次の Hamilton 方程式

$$\mu\dot{Q}_i = P_i, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial v}{\partial Q_i}, \qquad (i=1,\cdots,n),$$

$$Q(\alpha,0) = q^0(\alpha), \qquad P(\alpha,0) = p^0(\alpha)$$

の解であり，$\Gamma_t = \{Q(\alpha,t), P(\alpha,t)\}$,

$$\int |z_h(x,t)|^2 dx \to 0, \qquad (h\to 0)$$

である．

3. **系**　定理3.2の仮定が満たされているとせよ．$\psi(\alpha)$ の台 R は，Γ_t におけるその像 R_t が，局所座標として，$\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\cdots,\tilde{q}_n$ をとれるような領域に含まれるくらいに小さいものとする．このとき，

$$\tilde{\psi}(\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_k,\tilde{x}_{k+1},\cdots,\tilde{x}_n) = \Phi_{1/h}^{\tilde{x}_k}\psi(\tilde{x},t)$$

とおけば，

$$\int_{R_t}|\tilde{\psi}(\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_k,\tilde{x}_{k+1},\cdots,\tilde{x}_n)|^2 d\tilde{p}_1\cdots d\tilde{p}_k d\tilde{x}_{k+1}\cdots d\tilde{x}_n \to \int_R \varphi^2(\alpha)d\alpha, \qquad (h\to 0)$$

が成り立ち，しかもこの領域の外では0に収束する．(第2章§1-4° を参照せよ．)

4.　作用素 A が正定値でない場合，および $\varphi(\alpha)$ が Hilbert 空間値または可算ノルム空間値函数の場合への正準作用素の概念の一般化は，1変数の場合と全く同様にして行なわれる．

5.　第1章の方程式(1.16)を $a_1=0, a_2=1, B=0, A=1/h$ の場合について考察しよう．特に，$R=(\bar{\sigma}_2, H)$ の場合はこの方程式は Pauli 方程式に一致する(表1第5行)．

定理 3.3[1]　$\varphi(\alpha)\in C_0^\infty$, $g(\alpha)$ を長さ1の C^∞ 級ベクトルとする．方程式(1.16)$(a_1=0, a_2=1, B=0, A=1/h)$ の解 $\psi(x,\tau)$ (B-値函数)で初期条件

$$\psi(x,0) = K_{1/h,\Gamma,h}^{0,\alpha^0}\varphi(\alpha)g(\alpha), \quad \Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\} \qquad (1.4)$$

を満たすものは，次の漸近形をもつ．

$$\psi(x,t) = K_{1/h,\Gamma_t,h}^{\tau,\alpha_t{}^0}\varphi(\alpha)\exp\left\{i\int_0^t R[Q(\alpha,t),t]dt\right\}g(\alpha).$$

ここで，α^0 は多様体 Γ の上の始点，

1)〔訳注〕 div $\mathscr{A}=0$ とすれば，この公式は正しい．

$$\gamma = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} Q(\alpha^0, 0, t) + \frac{1}{h} S(\alpha^0, t).$$

$Q(\alpha, t), P(\alpha, t), S(\alpha, t)$ は次の Hamilton 方程式系の解である.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{s} = -H + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i,$$

$$q(0) = q^0(\alpha), \qquad p(0) = p^0(\alpha), \qquad s(0) = 0^{1)},$$

$$H(q, p, t) = [p + A(q, t)]^2 - \Phi_0(q, t),$$

$$\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\},$$

$$R(Q, t) = ie(\bar{\sigma}_2, \overline{H}(Q, t)).$$

6. この場合も, $\int_{R_t} \psi(\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_k, \tilde{x}_{k+1}, \cdots, \tilde{x}_n)^2 d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_k dx_{k+1} \cdots dx_n$ に関しては, **3** の系と全く同じことが成り立つが, ψ の各成分に関しては **3** は成立しない. このことは Pauli 方程式の場合について考えてみるならば, 古典的粒子はある種のベクトル(スピン)に対応し, そのベクトルは次の法則

$$\bar{\tau}(\alpha, t) = \exp\left\{ i \int_0^t R[Q(\alpha, \tau), \tau] d\tau \right\} \bar{\tau}(\alpha, 0)$$

に従って変化すること, すなわち, スピンは古典的極限をもつということを意味する.

2° Feynman の連続積分に対する停留位相の方法

Schrödinger 方程式の Green 函数(基本解) $G(x, \xi, t)$ は, 初期条件

$$K_{1/h, \Gamma}^{\gamma^0, \alpha^0} \varphi(\alpha),$$

$$\Gamma = \{q(\alpha) = \xi, p(\alpha) = \alpha\}, \qquad \varphi(\alpha) = 1$$

を満たす. 一方, Green 函数は, よく知られているように, Feynman の連続積分によって

$$\Phi = \int \exp\left(\frac{i}{h}\theta\right) \Pi\, dq(\tau)$$

と表示される. ここで,

$$\theta = \int_0^t L(\dot{q}, q, \tau) d\tau, \qquad q = q(\tau), \qquad q(0) = \xi, \qquad q(t) = x, \tag{a}$$

$$L(\dot{q}, q, \tau) = \frac{\dot{q}^2}{2} - v(q, \tau).$$

1)〔訳注〕 $S(\alpha^0, 0) = 0$ の意味である.

(Feynman[1], Morette[1], Groenewold[1].)

先に述べた例と同様にして，以下のことは見易い．すなわち，方程式 $\delta\theta=0$ が有限個の解 $q^k=q^k(\tau,t,x,\xi)(k=1,\cdots,k_0)$ をもち，$\delta^2\theta$ が $q=q^k$ において零固有値をもたないならば，

$$\begin{aligned}\Phi &= G(x,\xi,t)\\ &\simeq (2\pi ih)^{-n/2}\sum_k |D(q^k)|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{i\pi\gamma_k}{2}+\frac{i}{h}\int_0^t L(\dot{q}^k,q^k,\tau)d\tau\right\}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，γ_k は極値 q^k における2階の変分の負の固有値の数1)であり，$D(q^k)=(D(p^k(0))/Dx)^{-1}, p^k(0)$ は極値 q^k の初期速度である．この公式は停留位相の方法の連続積分の場合への拡張である．停留位相の方法とは，次の積分

$$I=\int \exp\left\{\frac{i}{h}F(x)\right\}dx, \qquad x\in \boldsymbol{R}^n$$

の $h\to 0$ での漸近挙動を調べる方法であって，適当な仮定のもとで(第6章§2を見よ)次の公式が成り立つ．

$$I\approx (2\pi ih)^{n/2}\sum_k |D(x^k)|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{i\pi\gamma_k}{2}+\frac{i}{h}F(x^k)\right\}.$$

ただし，x^k は $dF=0$ の有限個の根であって，x_k において，F の Hesse 行列 A は零固有値をもたないものとする．γ_k は，A の負の固有値の数，$D(x)=\det A$ (Федорюк[2])．

§2　相対論的方程式の解に対する漸近形

1. 第1章の方程式(1.16)について，特に係数が表1の第1行から第4行までの値をとる場合(それぞれ波動，Maxwell, Dirac, Klein–Gordon–Фок 方程式)を研究しよう．この場合方程式(1.16)は，以下のようにより簡単な形に表わし得る．

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}-iA\Phi(x,t)\right]^2-c^2(x,t)[(\nabla+iA\mathscr{A}(x,t))^2+A^2\gamma^2]\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^n B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}+iAR(x,t)\right\}\psi(x,t)=0. \tag{2.1}$$

1)　よく知られているように，これは Morse の指数と一致する(Лаврентьев–Люстерник[1], Morse[1])．

ここで，$\psi(x,t)$ はベクトル値函数 $\psi(x,t)=\psi_1,\cdots,\psi_s$ であって，各係数は次の表2の値をとる．

表 2

方程式	$\Phi(x,t)$	$c^2(x,t)$	$\mathscr{A}(x,t)$	γ	$B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}$	$R(x,t)$
波動	0	$c^2(x,t)>0$	0	0	0	0
Maxwell	0	〃	0	0	表1を見よ	I
Dirac	$\Phi(x,t)$ ポテンシャル	$c^2=$定数	$\mathscr{A}(x,t)=\mathscr{A}_1(x,t),\cdots,\mathscr{A}_n(x,t)$ ベクトル・ポテンシャル	$mc=$定数	0	$\frac{e}{c}\{(\bar{\sigma},\overline{H})-i(\bar{\alpha},\overline{E})\}$
Klein-Gordon-Фок	〃	〃	〃	〃	0	0

(2.1)に対する特性方程式は，

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t}-\Phi(x,t)\right]^2-c^2(x,t)\{[\nabla S+\mathscr{A}(x,t)]^2+\gamma^2\}=0 \tag{2.2}$$

である．この方程式の二つの解は，

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t}=H^\nu(x,\nabla S^\nu,t)$$

$$H^\nu(x,p,t)=\Phi(x,t)+(-1)^\nu c(x,t)\sqrt{|p+\mathscr{A}(x,t)|^2+\gamma^2},\qquad (\nu=1,2)$$

であり，それぞれ次の陪特性方程式が対応する．

$$\dot{q}_i{}^\nu=-\frac{\partial H^\nu(q^\nu,p^\nu,t)}{\partial p_i{}^\nu};\ \ \dot{p}_i{}^\nu=\frac{\partial H^\nu(q^\nu,p^\nu,t)}{\partial q_i{}^\nu},\qquad (i=1,\cdots,n)$$

$$\dot{s}^\nu=H^\nu-\sum_{i=1}^n p_i{}^\nu H_{p_i}{}^\nu \tag{2.4}$$

この系の初期値 $q(0)=q^0(\alpha)$, $p(0)=p^0(\alpha)$, $s^\nu(0)=0$[1] ($\Gamma=\{q^0(\alpha),p^0(\alpha)\}$ は Lagrange 多様体)に対する解を

$$Q^\nu(\alpha,t)=q^\nu(t);\quad P^\nu(\alpha,t)=p^\nu(t),$$

$$S^\nu(\alpha,t)=s^\nu(t),\quad \Gamma_t{}^\nu=\{Q^\nu(\alpha,t),P^\nu(\alpha,t)\} \tag{2.5}$$

と表わす．

2. 次の定理が成り立つ．

定理 3.4 $\tau^\nu(\alpha)$ $(\nu=1,2)$ を任意の C^∞ 級ベクトル値函数，$\varphi^\nu(\alpha)$ $(\nu=1,2)$ を任

1)〔訳注〕 $S^\nu(\alpha^0,0)=0$ の意味である．

意のコンパクトな台をもつ H-値函数とする[1]．

このとき，次のように表わされる方程式(2.1)の解が存在する．

$$\psi^\nu(x,t)=K^{\gamma^\nu,\alpha^0}_{A,\Gamma^\nu,R_z}\left(\frac{c[q^0(\alpha),0]}{c[Q^\nu(\alpha,t),t]}\right)^{1/2}$$
$$\times\left\{\frac{|p^0(\alpha)+\mathscr{A}[q^0(\alpha),0]|^2+\gamma^2}{|P^\nu(\alpha,t)+\mathscr{A}[Q^\nu(\alpha,t),t]|^2+\gamma^2}\right\}^{1/4}\varphi^\nu(\alpha)$$
$$\times\exp\left\{(-1)^{\nu+1}\left[\int_0^t\left\{\sum_{k=1}^n P_k{}^\nu(\alpha,t)B_k[Q^\nu(\alpha,t),t]+R[Q^\nu(\alpha,t),t]\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+(P^\nu+\mathscr{A})\cdot\nabla c^2+(\mathrm{div}\,\mathscr{A})c^2+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\}\frac{dt}{2c\sqrt{|P^\nu+\mathscr{A}|^2+\gamma^2}}\right]\right\}\tau^\nu(\alpha), \qquad (2.6)$$

$$\gamma^\nu=AS^\nu(\alpha^0,t)-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\,Q^\nu(\alpha^0;0,t),\ \ (\nu=1,2).$$

t をパラメーターとする $\psi^\nu(x,t)$ の係数($s\times s$ の行列 $e_{ij}{}^\nu(\alpha)$)は，$\psi^\nu(x,t)$ を(2.1)に代入して，R_z の冪の係数を 0 と見なすことにより求めることができる．この手続は定理 3.4 によって正しい．

3. 上述の解 $\psi^\nu(x,t)\,(\nu=1,2)$ の線型結合 $\sum_{\nu=1}^2 C_\nu\psi^\nu(x,t)$ として，方程式(2.1)の解で，初期条件

$$\begin{cases}\psi(x,0)=K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,R_z}\varphi(\alpha)\tau(\alpha)\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)=0\end{cases}$$

または，

$$\begin{cases}\psi(x,0)=0\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)=K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,R_z}\varphi(\alpha)\tau(\alpha)\end{cases}$$

を(任意の有界な $s\times s$ 行列 $e_{ij}(\alpha)$ に対して)満たすものを，初等的に求めることができる．

空間 S(すなわち R_z に関する第0近似)では，たとえば第1の場合には，

$$\varphi^\nu(\alpha)=\Phi(q^0(\alpha),0)$$
$$+(-1)^\nu c(q^0(\alpha),0)\sqrt{|p^0(\alpha)+\mathscr{A}(q^0(\alpha),0)|^2+\gamma^2}$$

と仮定し，$\varphi^\nu(x,t)(\nu=1,2)$ の相加平均をとらなければならない．

---

1) $\varphi(\alpha)$ は H の上の一般函数としてもよい．たとえば，$A=i\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ とすると，$\varphi^\nu(\alpha)$ として $\delta(\tau)$, $\theta(\tau)$, τ^+ 等をとってもよい．

§3 例 と 系

1. 2乗可積分な ω の函数のつくる空間を $H=L_2[1,\infty]$, ω を掛ける作用素を A とする．このとき，波動方程式および Maxwell 方程式に対して解の高振動近似を求めることが問題となる．特に，Γ_0 が q 平面に平行な平面 $p=p_0$ のとき，解 $\psi(x,t)$ は，p_0 を波数ベクトルとする平面波を初期状態として持つ場合に相当する．このような構成法の物理的意味，および，それと幾何光学との関連が Courant–Hilbert[1]の本の第5版に精密に論じられている．そこでは十分小さい t_0 に対し，$t\leqq t_0$ での解の構成が問題となっている．ただし，$t\leqq t_0$ では陪特性曲線は交わらず，函数行列式 DX/Dx_0 は0にならないものとする．(第1章§1-1° を参照せよ.)

(2.6)を用いることにより，波動光学から幾何光学への移行を，大域的に行なうことができる．特に，$\psi(x,t)$ に対して，§1-1° の3および6で述べられたのと類似の命題が成り立つ．Maxwell の方程式の解の偏極は，高周波極限をもつこと，すなわち，幾何光学近似においてそれが観測され得るということが得られる．すべての幾何光学的光線は，光線に沿って変化するベクトル $\vec{e}(t)$ でなければならない．ベクトル $\vec{e}$ の電気的偏極は，$\vec{e}_E=\sqrt{\mu/\varepsilon}\,\vec{u}$ なる形をもち，磁気的偏極は，$\vec{e}_H=\sqrt{\varepsilon/\mu}\,\vec{u}$ なる形をもつ．ここで単位ベクトル $\vec{u}$ は方程式

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=-(\vec{u}\,\mathrm{grad}\,\ln n)\vec{p}(\alpha,t), \tag{3.1}$$

$$n=c\sqrt{\mu\varepsilon}$$

を満たす(Born[1]および Рытов[1])．この事実は，任意の時間 t に対して成り立つ．したがって焦点の存在は，古典的偏極には影響しない．すなわち，偏極は焦点を通過することによって変化することはない．

2. Dirac方程式のスピンの向きについても同様のことが成り立つ(Виленкин 他[1]および Маслов[2]を参照)．

Dirac 方程式における二つの解 $\psi^\nu(x,t)(\nu=1,2)$ は電子と陽電子に対応する(Фок[2]および Schweber[1]を見よ)．

Dirac 方程式の初期条件は関係(II)〔第1章§1-6° 段落4を見よ〕を満たす．この関係式は，公式(2.6)のベクトル $\tilde{\varepsilon}^\nu(\alpha)(\nu=1,2)$ に制限を与える．すなわち，

$\tilde{\tau}^{\nu}(\alpha)$ は次の特性行列

$$C^{\nu} = (-1)^{\nu}\sqrt{(c\nabla S_0 + c\mathscr{A})^2 + m^2c^4}\, I - \sum_{k=1}^{3}\alpha_k\left(c\frac{\partial S_0}{\partial x_k} - e\mathscr{A}_k\right) + \alpha_4 mc^2 \tag{3.2}$$

の零ベクトルであることがわかる．行列 C^{ν} の階数は2であるから，2個の1次独立な0ベクトル $\tilde{\tau}_i{}^{\nu}\,(i=1,2)$ が存在する．ベクトル達 $\tilde{\tau}_i{}^{\nu}\,(i=1,2,\nu=1,2)$ は4次元のベクトル空間の基底をなすので，初期条件

$$\psi(x,0) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\varphi(\alpha)$$

を満たす Dirac 方程式の解は，等式(2.6)の τ_{ν} に $\tilde{\tau}_i{}^{\nu}\,(\nu=1,2,i=1,2)$ を代入した式の線型結合で表現される．

3. 初期条件

$$\psi(x,0) = \varphi(x)e^{iAf(x)}g, \qquad A = i\frac{\partial}{\partial\tau},$$

(g：変数 τ に関する一般函数)

を満たす波動方程式の解 $\psi^1(x,t)$ について考察しよう．初期多様体 $\Gamma=\{q=\alpha,$ $p=\mathrm{grad}\, f(\alpha)\}$ は，関係式

$$|p^0(\alpha)|^2c^2(\alpha,0) = \mathrm{const} \tag{3.3}$$

を満たしているとする．平面 $q=x$ は，Γ_t と正則点で交わっているとする．このとき，このような点は有限個である．これは，(x,t) は焦点ではなく，方程式 $Q(\alpha,t)=x$ は有限個の解：$\alpha^1,\cdots,\alpha^k$ を持つということに他ならない．これらは，x,t に依存するので，$\alpha^i(x,t)\,(1\leqq i\leqq k)$ と表記しよう．公式(2.6)により，解 $\psi^1(x,t)$ は

$$\psi^1(x,t) = c(x,t)\sum_{j=1}^{k}\varphi[\alpha^j(x,t)]c^{-1}[\alpha^j(x,t),0] \times\left|\det\left\|\frac{\partial Q}{\partial\alpha_l}[\alpha^j(x,t),t]\right\|\right|^{-1/2}\mathrm{Re}\left[\exp\left\{-\frac{i\pi\gamma^j}{2}+iAf[\alpha^j(x,t)]\right\}\right] \times[1+\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m[\alpha^j(x,t),t]R_z{}^m]g \tag{3.4}$$ [1)]

1)〔訳注〕 この公式は，$c(x,t)$ が t に依存しない場合には正しい．t に依存する場合には

$$\frac{d}{dt}(|P(\alpha,t)|c[Q(\alpha,t),t]) = |P(\alpha,t)|\cdot\frac{\partial c}{\partial t}[Q(\alpha,t),t] \neq 0$$

であるから，$|P(\alpha,t)|^2c^2(\alpha,t)\neq\mathrm{const}$.

と表わされる．ここで γ_j は道 $Q(\alpha^j;0,t)$ に対する Morse の指数，すなわち

$$J(\alpha^j,\tau)=\det\left\|\frac{\partial Q(\alpha^j,\tau)}{\partial \alpha_l{}^j}\right\|,\qquad (0<\tau\leqq t)$$

の零点の個数である．(3.4)式を波動方程式に代入し R_z の冪の係数を0とおけば，$\varphi_m[\alpha^j(x,t),t]$に関して次の方程式を得る．

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}=\frac{c(\alpha^j,0)}{c[Q(\alpha^j,t),t]}\sqrt{|J(\alpha^j,t)|}\,\Box_{\alpha^j,t}\left(\frac{c[Q(\alpha^j,t),t]}{c(\alpha^j,0)\sqrt{|J(\alpha^j,t)|}}\right)\varphi_{m-1}$$

ここで，$\Box_{\alpha^j,t}$ は，曲線座標 α^j,t に関する d'Alembert 作用素である．$g=\theta(\tau)$ とおけば，

$$\mathrm{Re}\left[\exp(-i\pi\gamma_j/2)\exp\left\{f[\alpha^j(x,t)]\frac{d}{d\tau}\right\}\theta(\tau)\right]$$
$$=\begin{cases}(-1)^{-\gamma^j/2}\theta[\tau-f[\alpha^j(x,t)]], & \gamma^j;\text{偶数}\\ 0^{1)}, \quad \gamma^j;\text{奇数}\end{cases}$$

を得る．

$\psi^2(x,t)$ に関しても，全く同様の命題が成り立つ．したがって，これより第1章の問題(1.1)-(1.2)の解答が，(x,t) が焦点でない場合について，完全に得られたことになる．

4. 点 (x,t) が焦点ならば，定理3.4による解の漸近形は行列 $\|\partial Q_i(\alpha,t)/\partial\alpha_j\|$ の点 (x,t) における退化次数(＝次数－階数)重の積分で表わされる．ここでは多様体 Γ_t が一般の位置にある場合，すなわち退化次数1の場合について考えよう．

時間に依存しない係数をもつ波動方程式が与えられたとしよう．函数 $\varphi(\alpha)$ の台 R は，その像 R_t が地図帳 $\mathscr{H}$ の1枚の地図に含まれるくらいに小さいものとする．

$$\psi(x,0)=\varphi(x)\exp[i\omega f(x)],\qquad c^2(x)|\mathrm{grad}\, f(x)|^2=\mathrm{const}$$

であるとする．$\tilde{p}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n$ を正準地図の局所座標系とする．地図の中心点における $\tilde{p}_1$ の値を $\tilde{p}_1{}'$ とする．このとき，$\omega\to\infty$ での函数 $\psi^1(x,t)$ の漸近形は次の形をしている．

---

1)〔訳注〕 原著では，$\dfrac{(-1)^{-(\gamma^j-1)/2}}{\pi}\ln|\tau-f[\alpha^j(x,t)]|$ となっている．

$$\psi^1(x,t)=\frac{e^{-i\gamma\pi/2}\sqrt{i\omega}}{\sqrt{2\pi}}c(x)\int_{\tilde{p}_1'-\varepsilon}^{\tilde{p}_1'+\varepsilon}F(\tilde{p}_1)\varphi(\alpha)\left|\frac{\partial\tilde{p}_1\partial\tilde{x}_2\cdots\tilde{x}_n}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_n}\right|^{-1/2}$$

$$\times c^{-1}(\alpha)\exp[i\omega f(\alpha)]\exp[i\omega(\tilde{x}_1-\tilde{X}_1(\alpha,t))\tilde{p}_1]d\tilde{p}_1+O\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

ここで，$\alpha=\alpha(\tilde{p}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n,t)$ は方程式

$$\tilde{p}_1=\tilde{P}_1(\alpha,t),\qquad \tilde{x}_i=Q_i(\alpha,t),\qquad (2\leqq i\leqq n)$$

によって定まり，函数 F は十分に滑らかであり，

$$F(\tilde{p}_1)=\begin{cases}1, & \tilde{p}_1'-\dfrac{\varepsilon}{2}\leqq\tilde{p}_1\leqq\tilde{p}_1'+\dfrac{\varepsilon}{2}\\ 0, & \tilde{p}_1>\tilde{p}_1'+\varepsilon,\ \tilde{p}_1<\tilde{p}_1'-\varepsilon,\end{cases}$$

γ は $\det\left\|\dfrac{\partial Q_i(\alpha,\tau)}{\partial\alpha_j}\right\|$ の $0<\tau\leqq t$ における零点の個数である．

その他の場合われわれの仮定のもとで，たとえば行列 $\left\|\dfrac{\partial Q_i(\alpha,t)}{\partial\alpha_j}\right\|$ の階数は，1より小さいことはない[1)]．したがって任意の焦点は $n-1$ 重積分[2)]で表わされる．たとえば特異点の射影(焦点集合)が滑らかな曲線になっている場合，$x=x'$ を地図の中心の射影として，$\tilde{x}_1$ 軸および $\tilde{x}_2$ 軸を x' における法線および接線の方向にとることができる．この場合，積分は次のように簡単になる．すなわち，積分式を ω の冪に分解して，Airy 函数およびその微分の和にすることができる(Федорюк[1][3)])．焦点集合が図9のような形をしている場合，積分はその冪に分解した後に導函数を含まずに Airy の函数のみになる．

§4　弾性論の方程式系

弾性論の方程式系を考察しよう．

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad\,div}\,\bar{u}+\mu\Delta\bar{u}+\mathrm{grad}(\lambda)\mathrm{div}\,\bar{u}+2D\,\mathrm{grad}\,\mu=\rho\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}$$

ここで，$\lambda=\lambda(x)>0$，$\mu=\mu(x)>0$　$(x=(x_1,x_2,x_3))$ はLamé の係数，$\rho=\rho(x)$ は媒体の密度で x の C^∞ 級函数，

---

1)　もし $\left\|\dfrac{\partial Q_i}{\partial\alpha_j}\right\|_{\alpha=\bar{\alpha}}$ の階数が0であるならば，補題2.1により $\det\left\|\dfrac{\partial P_i}{\partial\alpha_j}\right\|_{\alpha=\bar{\alpha}}\neq 0$．$\sum P_i^2=\mathrm{const}\,c^{-2}(Q)$ を α に関して微分して，$\sum_i P_i\dfrac{\partial P_i}{\partial\alpha_j}=0$．ゆえに $p_i|_{\alpha=\bar{\alpha}}=0$．これは矛盾である．

2)〔訳注〕　原著では，1重積分になっているが，これは著者の誤解であろう．

3)　この論文で与えられた多次元の公式は，И. А. Гордеев の卒業論文で恐らく最初に応用された．

$$D = \|\varepsilon_{ij}\| = \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\|$$

は変位テンソルである.

特性多項式は四つの実根を持ち，それらに対して次の特性方程式がそれぞれ対応する(Зволинский–Скуридин[1]および Левин–Рытов[1]).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S_1{}^\sigma}{\partial t} = (-1)^\sigma \sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}} |\mathrm{grad}\, S_1{}^\sigma|, & (\sigma = 1, 2) \\ \dfrac{\partial S_2{}^\sigma}{\partial t} = (-1)^\sigma \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}} |\mathrm{grad}\, S_2{}^\sigma|, & (\sigma = 1, 2). \end{cases}$$

これらの方程式は今までと同様にして，次の陪特性方程式系を定める.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_\beta{}^\sigma}{dt} = (-1)^\sigma a_\beta(x_\beta{}^\sigma) \dfrac{p_\beta{}^\sigma}{|p_\beta{}^\sigma|} \\ \dfrac{dp_\beta{}^\sigma}{dt} = (-1)^{\sigma+1}\, \mathrm{grad}\, a_\beta(x_\beta{}^\sigma) |p_\beta{}^\sigma|, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2 \\ \beta = 1, 2 \end{pmatrix},$$

$$a_\beta(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}, & \beta = 1 \\ \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}, & \beta = 2, \end{cases}$$

$$x_\beta{}^\sigma = (x_{\beta 1}{}^\sigma, x_{\beta 2}{}^\sigma, x_{\beta 3}{}^\sigma),$$
$$p_\beta{}^\sigma = (p_{\beta 1}{}^\sigma, p_{\beta 2}{}^\sigma, p_{\beta 3}{}^\sigma).$$

$\Gamma_\beta{}^\sigma$ を 6 次元の相空間の中の 3 次元の Lagrange 多様体

$$\Gamma_\beta{}^\sigma = \{\mathring{x}_\beta{}^\sigma(\alpha), \mathring{p}_\beta{}^\sigma\}$$

とするとき，この Hamilton 方程式系に対して，初期値

$$x_\beta{}^\sigma(0) = \mathring{x}_\beta{}^\sigma(\alpha), \qquad p_\beta{}^\sigma(0) = \mathring{p}_\beta{}^\sigma(\alpha)$$

を与えたときの解および $\Gamma_\beta{}^\sigma$ の像を，通常のように

$$x_\beta{}^\sigma(t) = X_\beta{}^\sigma(t, \alpha), \qquad p_\beta{}^\sigma(t) = P_\beta{}^\sigma(t, \alpha)$$
$$\Gamma_{\beta t}{}^\sigma = \{X_\beta{}^\sigma(t, \alpha), P_\beta{}^\sigma(t, \alpha)\}$$

と表わそう.

定理 3.5 弾性論の方程式に対して，次のような解 $u_1{}^\sigma (\sigma = 1, 2)$ が存在する.

$$u_1{}^\sigma = K^{\Gamma^\sigma, \alpha_t{}^0}_{A, \Gamma_{1t}{}^\sigma, R_z} \varphi_1{}^\sigma(\alpha) \frac{\sqrt{\lambda[X_1{}^\sigma(\alpha, t)] + 2\mu[X_1{}^\sigma(\alpha, t)]}}{\rho(X_1{}^\sigma(\alpha, t))} P_1{}^\sigma(\alpha, t)$$

ここで，$\varphi_1{}^\sigma(\alpha)\in C_0{}^\infty[H]$,

$$\gamma^\sigma=-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\,l[\alpha^0,\alpha_t{}^0]-A\int_{l[\alpha^0,\alpha_t{}^0]}(Hdt-\sum_{i=1}^n p_i dq_i),\qquad(\sigma=1,2).$$

3次元空間の中の互いに直交し，かつ $p_2{}^\sigma(\alpha,t)$ に直交するベクトルを $\vec{n}^\sigma(\alpha,t)$ および $\vec{\nu}^\sigma(\alpha,t)$ とする．このとき次のように表わされる弾性論の方程式の解 $u_2{}^\sigma$ が存在する．

$$u_2{}^\sigma=K^{\gamma^\sigma,\alpha_t{}^0}_{A,\Gamma_{2t}{}^\sigma,R_z}\varphi_2{}^\sigma(\alpha)\frac{1}{\sqrt{\rho[X_2{}^\sigma(\alpha,t)]}}\left\{\vec{n}^\sigma(\alpha,t)\cos\int_0^t\left(\frac{\partial\vec{n}^\sigma}{\partial t}(\alpha,t),\vec{\nu}^\sigma(\alpha,t)\right)dt\right.$$

$$\left.+\vec{\nu}^\sigma(\alpha,t)\sin\int_0^t\left(\frac{\partial\vec{\nu}^\sigma}{\partial t}(\alpha,t),\vec{n}^\sigma(\alpha,t)dt\right\}$$

ここで

$$\gamma^\sigma=-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\,l[\alpha_0{}^0,\alpha_t{}^0]-A\int_{l[\alpha^0,\alpha_t{}^0]}(Hdt-\sum_{i=1}^n p_i dq_i)$$

$$\varphi_2{}^\sigma\in C_0{}^\infty[H],\qquad(\sigma=1,2).$$

普通，作用素 $A=i\partial/\partial\tau$ であり，$\varphi(\alpha)$ は τ の不連続函数(たとえば $\tau^+,\delta(\tau),\theta(\tau)$ 等)に有界な台をもつ無限回微分可能実数値函数を掛けたものである．$\varphi_i{}^\sigma$ $(i=1,2,\sigma=1,2)$ を適当にとることにより，次の初期値問題

$$\bar{u}(x,0)=K^{0,\alpha^0}_{A,\Gamma_1,R_z}\bar{\varphi}_0(\alpha)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}(x,0)=K^{0,\alpha^0}_{A,\Gamma_2,R_z}\bar{\psi}_0(\alpha)$$

を解くことができる．

§5　定常な場合

条件(3.3)が満たされているとする．波動方程式は $A=id/dt$ とすれば，

$$c^2(x)\Delta\psi+A^2\psi=0\qquad(5.1)$$

と書くことができるが，これもまたわれわれの分類によれば波動型の方程式である．$A=\omega$ とおけば，われわれは Helmholtz の方程式を得る．$i\partial/\partial t$ から掛け算作用素 ω への移行は，Fourier 変換を用いてなされる．

物理学においては，Helmholtz 方程式に対する問題は波動方程式に対する Cauchy 問題に起因するので，与えられた波動方程式に対する Cauchy 問題の

解から導かれた Helmholtz 方程式の解を論ずるのは自然である.

同様の事情は，非定常および定常な Schrödinger 方程式に対してもあてはまる.

したがって，$A=\omega$ に対する(5.1)の解は，形式的には第1章の問題(1.1)の解 $u(x,t)$ $(0\leqq t\leqq\infty)$ の t に関する超函数の空間 K の元としての Fourier 変換像として定義することができる. 空間 K は，$u(x,t)$ の $t\to\infty$ での振舞いに基づいて定められる. このとき $u(x,t)$ の R_z に関する漸近展開は解 $\psi(x,\omega)$ の空間 $\tilde{K}$ における $1/\omega$ に関する漸近展開に移行する. しかしながら，空間 K およびその基本函数空間を精密に述べなくとも，(2.6)の系として次のように定式化することができる.

$$\psi(x,\omega)=c(x)K_{\omega,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\frac{\varphi(\alpha)}{c[X(\alpha)]}+\Phi(x,\omega).$$

ここで，Φ は $\omega\Phi(x,\omega)$ が与えられた一般函数の空間 $\tilde{K}$ に属するようなものである.

焦点が現われないような点においては，公式(3.4)を用いることができるが，一般には焦点の数 K^0 は $t\to\infty$ のとき ∞ になってしまう. したがって級数の収束を改良するために，総和の記号の下に$\left(1-\dfrac{1}{1+A^2}\right)^i$ を補足しよう. これによって漸近展開の第1項は影響を受けない. ゆえに焦点ではない点において Green 函数の第1項の Fourier 変換は次のように書ける.

$$G(x,\xi)=c(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp\left\{i\omega\left[\displaystyle\int_0^{t_k}c^{-2}[Q(\alpha^k,\tau)]d\tau\right]-\dfrac{i\pi\gamma^k}{2}\right\}}{\sqrt{\left|\det\left\|\dfrac{\partial Q_i}{\partial\alpha_j{}^k}(\alpha^k,t^k)\right\|\right|}\,c[Q(\alpha^k,0)]\left(1+\dfrac{1}{\omega^2}\right)^k}\tag{5.2}$$

ここで，$Q(\alpha,t)$ は次の方程式系

$$\dot{Q}_i=2P_i,\qquad \dot{P}_i=\frac{\partial c^{-2}(Q)}{\partial Q_i},\qquad (i=1,\cdots,n)$$

$$P(\alpha,0)=\alpha,\qquad Q(\alpha,0)=\xi,\qquad |\alpha|^2=c^{-2}(\xi)$$

の解であり，$\alpha^k=\alpha^k(x,\xi),t^k=t^k(x,\xi)$ は，$X(\alpha_0{}^k,\xi,t^k)=x$ より求められる. 恐らく，この漸近形は，$c^{-2}(x)=E-v(x)$，すなわち，Schrödinger 方程式(混合型方程式)に対しても成り立つであろう. たとえば，函数の極(すなわち，その点で級数(5.2)が発散するような点 $E=E_n{}^0$)および，その点での留数は(近似的

に)Schrödinger 方程式の固有値および固有函数を定めることを示すことができる．しかし，その際いわゆる準定常状態と共鳴点が現われることも覚悟しなければならない(Маслов[4])．

この公式は，より精密な評価を与えるような別の方法でも得ることができる．その方法によれば，焦点においても，Green 函数の漸近形を書きくだすことができるが，補足的な構成を必要とするので，ここでは述べない．

公式(5. 2)は，第1種境界値問題に対する公式と非常に類似しているが，長方形に対する Green 函数を構成するときに用いられた‘反射’法の一般化である．

$c^{-2}(x)=E-v(x)$ のとき，方程式(5. 1)に対する短波近似の問題は，Schrödinger 方程式の固有函数に対する準古典近似の問題と同等である．

$$-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi+v(x)\psi=\lambda_k\psi,\qquad x=(x_1,\cdots,x_n)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx=1. \tag{5.3}$$

ここで漸近展開は，同時に二つのパラメーター h,k を動かして行なわれる．

$$h\to 0,\qquad k\to\infty,\qquad hk\to \text{const.} \tag{5.4}$$

$v(x)$ が多項式のように増大する場合は，そのような漸近形は一つのパラメーター：$k\to\infty$ に関するものと一致する．

$c^{-2}=E-v(x)$ の場合の方程式(5. 1)の解の $\omega\to\infty$ での漸近形に関する問題と類似のこの問題は，定理3. 1においてすでにわれわれの設定したところのものであるが，今は問題(5. 3)の解に関してより一般の定理を定式化しよう．

定理3.6　パラメーター $E\in\mathcal{E}=\{E^0-\varepsilon,E^0+\varepsilon\}$ に依存するコンパクトな Lagrange 多様体の族 $\Gamma(E)$ が次の力学系に関して不変であるとする．

$$\begin{cases}\dot{p}_i=-\dfrac{\partial v(q)}{\partial q_i},\qquad \mu\dot{q}_i=p_i,\qquad (i=1,\cdots,n)\\ H(p,q)=\dfrac{p^2}{2\mu}+v(q),\qquad H|_\Gamma=E.\end{cases} \tag{5.5}$$

ここで，C^∞ 級函数 $v(q)$ は，$\lim\limits_{|q|\to\infty}v(q)=\infty$ なる性質をもつ．不変測度 $\sigma(\alpha)$ に関して自己共役な，力学系(5. 5)に関する輸送作用素に対する固有値および固有函数を $\mu(E)$ および $\chi(\alpha)$ とする．すなわち，

$$i\frac{\delta}{\delta t}\chi(\alpha)=\mu(E)\chi(\alpha), \qquad \left(\frac{\delta}{\delta t}=\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

このとき，Hamilton 作用素

$$\hat{H}=-\frac{h^2}{2\mu}\Delta+v(x), \qquad x=(x_1,\cdots,x_n) \tag{5.6}$$

の固有値 $\lambda^k(h)$ で以下の性質をもつものが存在する．

$$\lambda^k(h)-E^k+\mu(E^k)h=O(h^2).$$

ここで $E^k\in\mathscr{E}$ は h に依存し，$\Gamma(E^k)$ は条件:

$$\frac{2}{\pi h}\oint_i pdq=l_i\,(\mathrm{mod}\,4), \qquad (i=1,\cdots,i_0)$$

を満たす．ただし，i_0 は多様体 Γ の Betti 数，$\oint_i$ は i 番目の道に関する積分，l_i はその道の指数である．区間 $\Delta\lambda=[\lambda^k-O(h),\lambda^k+O(h)]$ のスペクトル函数を $E_{\Delta\lambda}$ とすると，

$$\|[E_{\Delta\lambda}-1]K^{c,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^k)}\chi(\alpha)\|_{L_2}=O(h). \tag{5.7}$$

すでに述べた方法によってわれわれは固有値を $O(h^N)$(N は任意の自然数)の正確さで求めることも可能である．それに付随して(5.7)における区間の長さも $O(h^N)$ に縮められる．したがって λ^k が重複度1の固有値であって，区間$[\lambda^k-O(h^N),\lambda^k+O(h^N)]$がそれ以外に点スペクトルを含まないならば，作用素 H の固有函数 ψ_k の漸近形を求められる．

Pauli の方程式

$$\hat{H}_\pi\psi=\{(-ih\nabla+\mathscr{A}(x))^2-\Phi_0(x)-ieh(\bar{\sigma}_2,\overline{H}(x))\}\psi=E\psi \tag{5.8}$$

を研究しよう．Lagrange 多様体 $\Gamma(E)$ は，先の定理の条件を，

$$H(x,p)=[p+\mathscr{A}(x)]^2-\Phi_0(x) \tag{5.9}$$

に関して満たすものとする．作用素

$$R=i\frac{d}{dt}+ie(\bar{\sigma}_2,\overline{H}) \tag{5.10}$$

は，不変測度 $\sigma(\alpha)$ に関して2乗可積分な $\Gamma(E)$ 上の函数空間で自己共役である．R に対する固有値，固有函数を，それぞれ $\mu(E)$ および $\chi(\alpha)$ とする．($R=id/dt$ の場合(たとえば Schrödinger 方程式の場合)には，特に $\mu=0,\chi(\alpha)=1$ をとることもできたことに注意せよ．)

定理 3.6 a すでに述べた仮定のもとで，定理 3.6 と同じ命題が，$\hat{H}_\pi=[-ih\nabla$

$+\mathscr{A}(x)]^2-\Phi_0(x)-ieh(\bar{\sigma}_2, \bar{H}(x))$ に対しても成り立つ.

Pauliの方程式の場合には，軌道に沿ってスピンの向きがいかに変化するかを特徴づける行列が，普通の力学系に対する輸送作用素につけ加わっている．したがって，古典力学においてスピンは存在するが，古典軌道には影響を及ぼさない[1)]．しかし，スピンの存在によって，軌道に沿う輸送作用素ではなく，作用素(5.10)のスペクトル的性質を調べる必要が生ずる．というのは，R の固有函数および固有値はスピンを有する古典的粒子に関する問題に対応するからである．

1)　スピンに対する古典的極限の存在については，Галанин [1], Рытов [1], Pauli [1], Rubinow-Keller [1] を参照せよ．われわれはこの事実に対する厳密な証明を与え，力学系の輸送作用素との関り合いを得，スピンの振舞を，焦点の近くでも焦点から離れたところでも調べた．

第4章　作用素係数の方程式

§1　可算ノルム空間における方程式と量子力学の多体問題

線型偏微分方程式に含まれる微小パラメーターがある特定の変数に関する導函数にのみ付いている場合を考える．ただし量子物理化学の観点からもっとも一般的かつ実用的な範囲に問題を限ることとする．このような状況の例としては量子的分子論や衝突の理論において現われるような重い粒子と軽い粒子の相互作用に関連した問題がある．

このとき偏微分作用素は二つの変数の組に依存している．このうち微小パラメーターの付いている方の組(たとえば重い粒子を記述する方の組)は n 個の変数より成るとする．

残りの組の変数(その個数は0でもよい)とそれらに関する微分の方程式への関わり方については次のような一般的情報があれば足りる．すなわち，もとの方程式を最初に選ばれた n 個の変数の微分方程式と思い，その係数がこれら n 個の変数をパラメーターとして含む作用素であるというふうに単純化できるものとする．

たとえば，方程式

$$-\frac{h^2}{2m_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_1}^2}-\frac{h^2}{2m_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_2}^2}+v(x_1,x_2)\psi=\lambda\psi \tag{1.1}$$

において $m_1 \gg m_2$ であれば，これを

$$-\frac{h^2}{2m_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial {x_1}^2}+A(x_1)\psi=\lambda\psi$$

のように表わすことができる．ここに $A(x_1)$ は

$$A(x_1)=-\frac{h^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+v(x_1,x_2)$$

という，x_1 をパラメーターとして含む作用素である．作用素 $A(x_1)$ は非有界である．$v(x_1,x_2)\in C^\infty$ のときには，$A(x_1)$ は変数 x_2 の函数空間 $W_2{}^k[\boldsymbol{R}^1]$ を $W_2{}^{k-2}[\boldsymbol{R}^1]$ に写すといえる．そこで可算ノルム空間 $W_2{}^\infty[\boldsymbol{R}^1]$ を考えれば[1]，作

1)　すなわち各 $k=1,2,\cdots$ に対し $W_2{}^k[\boldsymbol{R}^1]$ に属するような x_2 の函数の空間．

用素 $A(x_1)$ は明らかにこの空間をそれ自身に写す．函数 $\psi(x_1, x_2)$ は x_2 の函数空間 $W_2^\infty[\boldsymbol{R}^1]$ に値をもつ x_1 の函数とみなされる．

一般の場合にこれらの作用素係数が働く可算ノルム空間を具体的に指定することはしないが，応用ではすべて $W_2^\infty[\boldsymbol{R}^s]$ を採用する．s は正整数である．

例としてもう一つの問題

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left[h^2\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}-v(x_1, x_2)\right]\psi=F(x_1, x_2, t, h) \tag{1.2}$$

$$\psi|_{t=0}=\psi_0(x_1, x_2, h)$$

を考える．与えられた函数はどれも全変数につき C^∞ 級で表式

$$\max_{\substack{0\leqq t\leqq t_0\\ 0\leqq h\leqq 1}}\left\{\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^j}{\partial {x_i}^j}F(x_1, x_2, t, h)\right|^2 dx_1dx_2\right\}^{1/2} \tag{1.3}$$

$$\max_{0\leqq h\leqq 1}\left\{\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^j}{\partial {x_i}^j}\psi_0(x_1, x_2, h)\right|^2 dx_1dx_2\right\}^{1/2} \tag{1.4}$$

は各 $k=1, 2, \cdots$ について有限であるとする．これは $F(x_1, x_2, t, h)$ が変数 x_1, x_2 の函数として $W_2^\infty[\boldsymbol{R}^2]$ に属し，t, h に関して連続であることを示す．(1.3) あるいは (1.4) の形の可算個のノルムを持った函数空間をそれぞれ $W_2^\infty[\boldsymbol{R}^2, C_2]$ あるいは $W_2^\infty[\boldsymbol{R}^2, C_1]$ で表わすことにする[1)]．

問題 (1.2) の解 $\psi(x_1, x_2, t, h)$ が条件

$$h\psi(x_1, x_2, t, h)\in W_2^\infty[\boldsymbol{R}^2, C_2]$$

を満たすことを信じよう（第5章を見よ）．これはいい換えれば，与えられた N に対し

$$F(x_1, x_2, t, h)\in W_2^N[\boldsymbol{R}^2, C_2], \qquad \psi_0(x_1, x_2, h)\in W_2^N[\boldsymbol{R}^2, C_1]$$

から

$$h\psi(x_1, x_2, t, h)\in W_2^{m(N)}[\boldsymbol{R}^2, C_2]$$

が得られるような $m(N)$ を

$$\lim_{N\to\infty} m(N)=\infty$$

を満たすように選べるということである．ここでは微小パラメーター h が微分に付いている変数 x_1, t を特に区別しなかったが，空間 $W_2^N[\boldsymbol{R}^2, C_2]$ を，x_2 の

1)〔訳注〕　これらは $C[\boldsymbol{R}^2, W_2^\infty[\boldsymbol{R}^2]]$ などと書く方が普通の記法に近い．$\displaystyle\max_{0\leqq h\leqq 1}\int|f(x, h)|^2dx$ は一般に const. $\displaystyle\int\max_{0\leqq h\leqq 1}|f(x, h)|^2dx$ で抑えられないので順番を混同することはできない．

函数空間 $W_2{}^N[\boldsymbol{R}^1]$ に値をもつ x_1, t, h の $W_2{}^N[\boldsymbol{R}^1, C_2]$ 級の函数の空間，すなわち $W_2{}^N\{\boldsymbol{R}^1, C_2, W_2{}^N[\boldsymbol{R}^1]\}$ と思えばそれができる．実際

$$\|F(x_1, x_2, t, h)\|_{W_2{}^N\{\boldsymbol{R}^1, C_2, W_2{}^N[\boldsymbol{R}^1]\}}$$
$$= \max_{\substack{0\leq t\leq t_0 \\ 0\leq h\leq 1}} \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{N}\left\|\frac{\partial^j}{\partial x_1{}^j}F(x_1, x_2, t, h)\right\|^2_{W_2{}^N[\boldsymbol{R}^1]} dx_1\right\}^{1/2} \tag{1.5}$$

〔であり，このノルムたちは(1.3)と同値である.〕

$\{B^N\}$ を Banach 空間の列

$$B^{N+1}\subset B^N, \qquad (N=1,2,\cdots)$$

で可算ノルム空間 B^∞ を定めるものとする．一般の状況として，抽象的可算ノルム空間 B^∞ に値をもつ $x_1, \cdots, x_n, t, h$ の $W_2{}^\infty[\boldsymbol{R}^n, C_2]$ 級の函数の空間を考える．これを $W_2{}^\infty[\boldsymbol{R}^n, C_2, B^\infty]$ で表わそう[1)]．この空間の可算個のノルムは

$$\max_{\substack{0\leq t\leq t_0 \\ 0\leq h\leq 1}} \left\{\sum_{\substack{i\leq n+1 \\ k\leq N}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{\partial^k}{\partial x_i{}^k}F(x_1, \cdots, x_n, t, h)\right\|^2_{B^N} dx\right\}^{1/2} \tag{1.6}$$

$$dx = dx_1\cdots dx_n, \qquad x_{n+1}=t$$

の形である．同様に $C^\infty[\boldsymbol{R}^{n+1}, C_1, B^\infty]$ により次の形の可算ノルム系を持った空間を表わすことにする[2)]．

$$\max_{\substack{0\leq t\leq t_0, |x|\leq\infty \\ 0\leq h\leq 1}} \sum_{\substack{i\leq n+1 \\ k\leq N}}\left\|\frac{\partial^k}{\partial x_i{}^k}F(x, t, h)\right\|_{B^N}, \qquad x_{n+1}=t \tag{1.7}$$

多様体 Γ の上に可算ノルム空間 B^∞ に値を持つ基底ベクトル $\chi_\nu(\alpha), \nu=1, \cdots, r$ が与えられ，これらは α につき，各階導函数が再び B^∞ に属するという意味で無限回微分可能であるとする．

$$\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha)\chi_\nu(\alpha)$$

の形の B^∞ 値函数を $x_1, \cdots, x_n$ のある B^∞ 値函数に写す正準作用素 $K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}$ が通例のごとくに定義される[3)]．

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha)\chi_\nu(\alpha) = e^{i\gamma}\sum_{\nu,\mu}\sum_{j\in j(x)}\exp\left\{-\frac{\pi i}{2}\mathrm{Ind}\, l[\alpha^0, \alpha_k{}^j]\right\}\Phi^{\tilde{p}_k}e_{\nu\mu}{}^j(\alpha^j(\tilde{y}_k), h)$$

1)〔訳注〕 次のノルムを見ると今度は t に関しても微分しているようなのでこの叙述は正確ではない．

2)〔訳注〕 max を $|x|\leq\infty$ 全体でとるときは C^∞ でなく $\mathcal{B}^\infty$ という記号を使う方が普通．

3)〔訳注〕 次の式は原書で空白になっていたのを適当に補塡したものである．

$$\times\left|\frac{D(\alpha)}{D(\tilde{y}_k)}\right|^{1/2}\exp\left\{\frac{i}{h}\left[\int_{l[\alpha^0,\alpha^j(\tilde{y}_k)]}\tilde{p}d\tilde{q}-\sum_{i=1}^{k}\tilde{p}_i\tilde{q}_i(\alpha^j(\tilde{y}_k))\right]\right\}$$

$$\times\varphi_\mu(\alpha^j(\tilde{y}_k))\chi_\mu(\alpha^j(\tilde{y}_k))\Big|_{q=x}.$$

ここに

$$\Phi^{\tilde{p}_k}\psi(\tilde{y}_k)=\frac{e^{k\pi i/4}}{(2\pi h)^{k/2}}\int\exp\left\{\frac{i}{h}\sum_{j=1}^{k}\tilde{p}_j\tilde{q}_j\right\}\psi(\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\cdots,\tilde{q}_n)d\tilde{p}_1\cdots d\tilde{p}_k$$

であり $\tilde{y}_k=(\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\cdots,\tilde{q}_n)$ である. $(e_{\mu\nu}{}^i(\alpha,0))=e^i(\alpha)I$ であったことを思い起こそう. ここに I は考えている部分空間における単位行列, $\{e^i(\alpha)\}$ は正準地図帳 $\mathcal{H}$ における1の分解である.

§2 作用素係数の方程式の Cauchy 問題の解の漸近形

第1章の方程式(3.9)の解の漸近形を調べよう. B^∞ は〔連続な包含関係〕$B^{i+1}\subset B^i$ を満たす Banach 空間の列 $B^1, B^2, \cdots, B^N, \cdots$ の共通部分から成る可算ノルム空間とし, この空間 B^∞ をそれ自身に写し $2n+3$ 個のパラメーターを含む作用素

$$L(p_1,\cdots,p_n,p_{n+1},x_1,\cdots,x_n,t,h)$$

を考える. 作用素 L はこれらのパラメーターに関し領域 $p=(p_1,\cdots,p_n)\in\Omega_p$, $x\in\Omega_x$, $0\leqq t\leqq T$ において無限回微分可能で[1], 偏導函数はいずれも B^∞ をそれ自身に写すと仮定する.

条件1 B^1 は Hilbert 空間であるとする. 〔さらに, 作用素 L は B^1 からそれ自身に働くとする.〕 作用素 $L_0=L(p,p_{n+1},x,t,0)$ および〔B^1 におけるその共役〕$L_0{}^*=L^*(p,p_{n+1},x,t,0)$ は, パラメーター p, p_{n+1}, x, t を含む共通固有値 $\lambda(p,p_{n+1},x,t)$ を持つと仮定する. この固有値の重複度は L_0 と $L_0{}^*$ について同一で, パラメーターに依存せず, それは有限であるか, さもなければ $L_0\equiv L_0{}^*\equiv\lambda(p,p_{n+1},x,t)$ であるとする. $\lambda(p,p_{n+1},x,t)$ に対応する作用素 $L_0, L_0{}^*$ のそれぞれの固有函数 $\chi_1(p,p_{n+1},x,t)$, $\cdots$, $\chi_r(p,p_{n+1},x,t)$, $\chi_1{}^\dagger(p,p_{n+1},x,t)$, $\cdots$, $\chi_r{}^\dagger(p,p_{n+1},x,t)$ は B^∞ に属し

$$\det\|(\chi_i{}^\dagger,\chi_j)\|\neq 0$$

1)〔訳注〕 p_{n+1} に関しては多項式であることがすぐ後で仮定される.

であるとする[1]．この不等式により $\chi_i^\dagger (i=1, \cdots, r)$ を $(\chi_i^\dagger, \chi_j)=\delta_{ij}$ となるように選ぶことができる．$P_\lambda, P_\lambda^\dagger$ をそれぞれ作用素 L_0, L_0^* の固有値 $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ に対応する固有空間への射影作用素とする．

作用素

$$T=\{[L(p, p_{n+1}, x, t, 0)-\lambda(p, p_{n+1}, x, t)][1-P_\lambda]\}^{-1}[1-P_\lambda^\dagger]$$

は B^∞ において存在し，かつ B^∞ 上いたるところで定義されているとする．また

$$L(p, p_{n+1}, x, t, h)=\sum_{k=0}^{m} \Lambda_k(p, x, t, h) p_{n+1}{}^k$$

とする．

$$\begin{aligned} \hat{L}\psi &= L\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, -ih\frac{\partial}{\partial x_n}, -ih\frac{\partial}{\partial t}, x_1, \cdots, x_n, t, h\right)\psi \\ &= \sum_{k=0}^{m} \Lambda_k\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, -ih\frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \cdots, x_n, t, h\right)\left(-ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \psi \qquad (2.1) \end{aligned}$$

とおく．ここに

$$\begin{aligned} \Lambda_k\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, -ih\frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \cdots, x_n, t, h\right)\psi &= \Lambda_k(\hat{p}, x, t, h)\psi \\ &= (2\pi h)^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/h} dp \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_k(p, x, t, h) e^{-ip\xi/h}\psi(\xi, t) d\xi. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

条件2　r および $s_k (k=0, \cdots, m-1)$ を任意に定められた定数，$F=F(x, t, h)$ および $\psi_0=\psi_0(x, h)$ を x につき無限回微分可能で h, t につき B^∞ 値連続な任意の函数とし，問題

$$\begin{aligned} &\hat{L}\psi = h^r F \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \psi\bigg|_{t=0} = h^{s_k}\psi_0, \qquad (k=0, \cdots, m-1) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

の解は同種の函数のクラス[2]の中で一意的に存在するとする．最後に(第1章

---

1)　$r=\infty$ でも作用素 $L(p, p_{n+1}, x, t, h)$ のパラメーターに関するすべての可能な導函数 L_i に対し，$\|(\chi_\nu^\dagger, L_i\chi_\mu)\|_{\nu,\mu\leq r}$ の形の行列がパラメーター $p, x, t (p\in\Omega_p, x\in\Omega_x, t\in[0, T])$ に依存しない次元 $m<\infty$ の共通の不変部分空間を持てば十分である．ただしこのときにはこの部分空間を生成する函数 $\chi_\nu^\dagger$, χ_μ のみを考察することになる．

2)　これは $\max\limits_{\substack{x, 0\leqq t\leqq T \\ 0\leqq h\leqq 1}} \|(\partial/\partial x)^k F(x, t, h)\|_{B^k} (k=1, 2, \cdots)$ の形の可算個のノルムを持つ函数 $F(x, t, h)$ の空間である〔ここに $(\partial/\partial x)^k$ は k 階以下のすべての微分の代表〕．

§3の意味の)特性方程式 $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)=0$ は単純な[1)]実根 $p_{n+1}=-H(p, x, t)$ を持つと仮定する[2)]．したがって $\partial\lambda/\partial p_{n+1}\neq 0$ である．$Q(\alpha, t)$, $P(\alpha, t), 0\leqq t\leqq T$ を方程式

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial Q_i}, \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{2.4}$$

の初期条件

$$Q|_{t=0}=q^0(\alpha), \qquad P|_{t=0}=p^0(\alpha) \tag{2.5}$$

を満たす C^∞ 級の解とし[3)]，各領域 Ω_x および Ω_p 内に値をとるものとする．

以上掲げた条件のうちで具体的な量子力学の問題において実際に検証する必要があるのはスペクトル $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ の孤立性と重複度の一定性だけであることを注意しておこう．残りの条件のうち微分作用素について自明でないものは，a) 固有函数 $\chi_i, \chi_i^\dagger$ が空間 B^∞ に属すること，b) $F\in B^\infty$ を与えたとき方程式

$$[L(p, p_{n+1}, x, t, 0)-\lambda]\chi = F$$

の解 $\chi\in B^\infty$ の存在，c) 方程式(2.3)の解の存在と一意性，であるが，これらの条件は量子力学の方程式に対してはエネルギー不等式を用いて確かめることができるのである．

これらの仮定のもとに次の定理が成り立つ．

定理 4.1　$\Gamma_0=\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ を Lagrange 多様体，α^0 をその始点とする．α につき台が有界で無限回微分可能，かつそれ自身およびすべての導函数の値が $0\leqq h\leqq 1$ において有界なベクトル函数

$$\varphi_0(\alpha, h) = \{\varphi_{01}(\alpha, h), \cdots, \varphi_{0r}(\alpha, h)\}$$

が任意に与えられたとき，方程式

$$\hat{L}\psi = 0 \tag{2.6}$$

の解で次の形に表わされるものが存在する[4)]．

---

1)〔訳注〕 原文は‘重複度一定’となっているが $(\partial\lambda/\partial p_{n+1})|_{p_{n+1}=\lambda}$(以下 $\partial\lambda/\partial p_{n+1}$ と略記される) $\neq 0$ を使うので以下の議論そのままでは困る．

2)〔訳注〕 以下原著は符号の統一がとれていない．力学と合わせるため結果の方をそのままとし，特性根に負号をつけることとした．

3) 任意の時刻 T に対するこのような解の存在については補足の補題1を見よ．

4) 〔以下簡単のため $\chi_\nu[p, q, t]=\chi_\nu(p, -H(p, q, t), q, t)$ と規約する．したがって〕正確に書けば次の式中の $\chi_\nu[P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t]$ は $\chi_\nu(P(\alpha, t), -H(P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t), Q(\alpha, t), t)$ の意味である．

$$\psi = K_{1/h, \Gamma_t, h}^{\gamma, \alpha_t^0} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha, t, h) \chi_\nu[P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t]. \tag{2.7}$$

ここに $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$ であり $\alpha_t{}^0$ は多様体 Γ_t の始点で

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_t{}^0] + \frac{1}{h} \int_{l[\alpha^0, \alpha_t{}^0]} (-H dt + \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i). \tag{2.8}$$

またベクトル函数

$$\varphi = \{\varphi_1(\alpha, t, h), \cdots, \varphi_r(\alpha, t, h)\}$$

は初期条件

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(\alpha, h)$$

と方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}} \varphi\right) = \left\| -\left(\chi_\nu{}^\dagger, \frac{d\chi_\mu}{dt}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}} - \sum_{i=1}^{n+1} \left(\chi_\nu{}^\dagger, \left(\frac{\partial L_0}{\partial p_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_i}\right) \frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_i}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_i \partial x_i} (\chi_\nu{}^\dagger, \chi_\mu) - i \left(\chi_\nu{}^\dagger, \frac{\partial L}{\partial h} \chi_\mu\right)_{h=0} \right\| \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}\right)^{-1/2} \varphi \tag{2.9}$$

とを満たす．ここに $x_{n+1} = t$, $p = P(\alpha, t)$, $x = Q(\alpha, t)$ である．一方 $L_0 \equiv L_0{}^* \equiv \lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ の場合には，$\exp\left\{it \left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}\right\}$ が B^∞ をそれ自身に写すという仮定の下に φ は次の方程式を満たす．

$$\sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}} \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}} \varphi\right) = \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_j \partial x_j} - i \left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}\right] \varphi.$$

等式(2.7)は x, t につき無限回微分可能でそれ自身とこれらすべての導函数がいずれも $O(h^\infty)$ の位数をもつような函数の誤差を除いて成立していたことを思い起こそう．

定理 4.1 の一つの重要な一般化を与えよう．A を稠密な定義域 $D(A) \subset B^i$ $(i=1, 2, \cdots)$ を持つ閉作用素とする．$\varepsilon > 0$ または ε が純虚数のとき $(1+\varepsilon A)^{-1}$ は存在し各 B^i $(i=1, 2, \cdots)$ 上いたるところ定義され

$$\|(1+\varepsilon A)^{-1}\|_{B^i} \leqq 1, \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

を満たすとする．また A^{-1} は存在すると仮定する．作用素 $\hat{L}$ においてパラメーター $1/h$ を形式的に作用素 A におき換える．

定理 4.2 定理 4.1 と同じ仮定[1]のもとに方程式

1) この場合には(2.3)において h を A^{-1} でおき換え，また F, ψ_0 は h に無関係で可算個のノルム $\max_{x, 0 \leqq t \leqq T} \|(\partial/\partial x)^k F(x, t)\|_{B^k}$ $(k=1, 2, \cdots)$ を持つ函数空間に属するとしなければならない．

$$L\left(-\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right)\psi = 0$$

の解で次の形に表わされるものが存在する[1].

$$\psi = K^{\gamma, \alpha_t{}^0}_{A, \Gamma_t, (1+\varepsilon A)^{-1}} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha, t)\chi_\nu[P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t]. \tag{2.10}$$

ここに $\gamma, \alpha_t{}^0, \Gamma_t, \chi_\nu, P(\alpha, t), Q(\alpha, t)$ は前定理において定義されたものであり[2], $\varphi_\nu(\alpha, t)$ は方程式(2.9)と初期条件 $\varphi_\nu(\alpha, 0)=\varphi_\nu{}^0(\alpha)$ を満たす．ここに $\varphi_\nu{}^0(\alpha)(\nu=1, \cdots, r)$ は台が有界で無限回微分可能な任意の函数でよい．

Cauchy 問題の解の漸近形に関して本書で述べてきた結果はすべてこの定理から導かれる[3].

定理 4.1 において $m=1$,　$\Lambda_1\equiv 1$,　$\Lambda_0(p, x, t, h) = L(p, x, t, h)$ とおき，$L_0=L(p, x, t, 0)$ が B^1 において自己共役であるとすれば次の系が得られる．

定理 4.1 a　定理 4.1 の仮定のもとに初期値問題

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = L(\hat{p}, x, t, h)\psi \tag{2.11}$$

$$\psi|_{t=0} = K^{0, \alpha^0}_{1/h, \Gamma, h} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu{}^0(\alpha, h)\chi_\nu[p^0(\alpha), q^0(\alpha), 0] \tag{2.11 a}$$

$$\text{ここに}\quad \varphi_\nu{}^0(\alpha, h) \in C^\infty[C_1]$$

の解は次の形に表わされる．

$$\psi = K^{\gamma, \alpha_t{}^0}_{1/h, \Gamma_t, h} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha, t, h)\chi_\nu[P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t]. \tag{2.12}$$

ここに $\alpha_t{}^0, \Gamma_t, P(\alpha, t), Q(\alpha, t)$ は先に定義した通りであり，

$$\varphi(\alpha, t, h) = \{\varphi_1(\alpha, t, h), \cdots, \varphi_r(\alpha, t, h)\}$$

は方程式

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left\| -\left(\chi_\nu, \frac{d\chi_\mu}{dt}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\chi_\nu, \left(\frac{\partial L_0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial \chi_\mu}{\partial x_i}\right)\right.$$

---

1)　作用素 $\hat{L}=L\left(-\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right)$ は次のようにして定義されたことを思い起こそう：$\hat{L}\varphi(x, t)=\sum_{k=0}^{m}\Lambda_k\left(-\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right)\left(-\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\varphi(x, t)$, $\Lambda_k\left(-\frac{i}{A}\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right)\varphi(x, t)=\Phi_A{}^{p_n}\Lambda_k(p, x, t, A)\Phi_A{}^{x_n}\varphi(x, t)$. ここに $\Lambda_k(p, x, t, A)$ は B^∞ 上の作用素で A と可換，かつレゾルベント $(A-i)^{-1}$ の冪につき漸近展開されるものである．(2.10)式中の ε も純虚数である．

2)　γ の表現(2.8)においても今は $1/h$ を A に代えなければならぬ．

3)　定理 4.2 は条件 $\|(1+\varepsilon A)^{-1}\|_{B^i}\leqq 1$ が純虚数の ε および $\varepsilon<0$ に対して成り立つ場合も正しい．またさらに，この条件か純虚数の ε についてのみ成り立つ場合でも，$B^i=B^{i+}\oplus B^{i-}$ となっていれば定理 4.2 はやはり成り立つ(p. 144 注を見よ)．

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i}\delta_{\mu\nu}-i\left(\chi_\nu, \frac{\partial L}{\partial h}\chi_\mu\right)_{h=0}\Bigg\|_{\substack{p=P(\alpha,t)\\ x=Q(\alpha,t)}}\varphi \qquad (2.13)$$

と初期条件

$$\varphi_\nu(\alpha, t, h)|_{t=0} = \varphi_\nu{}^0(\alpha, h), \qquad (\nu = 1, \cdots, r)$$

を満たす.

この一般的定理から双曲型方程式系の振動初期値または不連続初期値をもつ解の(大域的)漸近公式を得るのは容易である.

例として弱結合双曲系(weakly coupled hyperbolic system)を考察しよう. 定理3.4あるいは第1章で述べたすべての例も定理4.2から導かれる.

§3 双 曲 系

Петровский の意味の弱結合双曲系

$$Lu = \frac{\partial^s u}{\partial t^s} + \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_{n+1}\leqq s\\ k_{n+1}\neq s}} a_{k_1,\cdots,k_{n+1}}(x,t)\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_{n+1}}u}{\partial x_1{}^{k_1}\cdots\partial x_n{}^{k_n}\partial t^{k_{n+1}}} = 0 \qquad (3.1)$$

を考える. ここに

$$u = (u_1, \cdots, u_r)$$

であり $a_{k_1,\cdots,k_{n+1}}(x,t)$ は $k_1+\cdots+k_{n+1}<s$ に対しては r 次の行列であるが, $k_1+\cdots+k_{n+1}=s$ に対してはスカラー函数である. 作用素 L の主部を

$$\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} + \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_{n+1}=s\\ k_{n+1}\neq s}} a_{k_1,\cdots,k_{n+1}}(x,t)\frac{\partial^s}{\partial x_1{}^{k_1}\cdots\partial x_n{}^{k_n}\partial t^{k_{n+1}}} \qquad (3.2)$$

とおき, また

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) = \sum_{k_1+\cdots+k_{n+1}=s-1} a_{k_1,\cdots,k_{n+1}}(x,t)\frac{\partial^{s-1}}{\partial x_1{}^{k_1}\cdots\partial x_n{}^{k_n}\partial t^{k_{n+1}}} \qquad (3.3)$$

なる記号で右辺の行列型作用素を表わすことにする. 次の仮定をおこう.

1) 多項式 $\Lambda(p, p_{n+1}, x, t)=0$ の p_{n+1} に関する根 $p_{n+1}=-H^\nu(x,p,t)$ は実で互いに異なる.

2) p の多項式 $\Lambda(p, 0, x, t)$ は非負であり, 特に $|p|\geqq\delta>0$ ならば $\Lambda(p, 0, x, t)\geqq\varepsilon>0$ となる.

3) 方程式の係数は C^∞ 級である.

(3.1)に対する特性方程式は次の形をしている.

$$\Lambda\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t\right) = 0. \tag{3.4}$$

この方程式の s 個の根

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t} = -H^\nu\left(x, \frac{\partial S^\nu}{\partial x}, t\right), \qquad (\nu = 1, \cdots, s) \tag{3.5}$$

にはそれぞれ第1章(1.2)式の形の Hamilton 方程式を満たす s 個の陪特性帯が対応する.

定理 4.3 A を Hilbert 空間 H の自己共役作用素〔で定理 4.2 の仮定を満たすもの〕とする. $\varphi(\alpha)$ を H に値を持つ多様体 Γ 上の台が有界で無限回微分可能な任意のベクトル函数とする. 双曲型方程式(3.1)に対する上述の仮定のもとに, その解 $u(x, t)$, すなわち H に値をとるベクトル函数であって, 次の形に表わされるものが存在する[1].

$$\begin{aligned} u(x,t) = K^{\gamma^\nu, \alpha_t{}^0}_{A, \Gamma_t, R_z}&\left[\frac{\partial \Lambda(p^\nu, -H^\nu, q^\nu, t)}{\partial p_{n+1}}\right]^{1/2}_{t=0}\left[\frac{\partial \Lambda(p^\nu, -H^\nu, q^\nu, t)}{\partial p_{n+1}}\right]^{-1/2} \\ &\times \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{\partial \Lambda(p^\nu, -H^\nu, q^\nu, t)}{\partial p_{n+1}}\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda(p^\nu, -H^\nu, q^\nu, t)}{\partial p_i{}^\nu \partial q_i{}^\nu}\right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{\partial^2 \Lambda(p^\nu, -H^\nu, q^\nu, t)}{\partial p_{n+1}\partial t} - 2B(p^\nu, -H^\nu, q^\nu, t)\right] dt\right\}\varphi(\alpha). \end{aligned} \tag{3.6}$$

ここに,

$$\gamma^\nu = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_t{}^0] + A\int_{l[\alpha^0, \alpha_t{}^0]}(-H^\nu dt + \sum_{i=1}^n p_i dq_i)$$

$$p^\nu = P^\nu(\alpha, t), \qquad q^\nu = Q^\nu(\alpha, t), \qquad H^\nu = H^\nu(Q^\nu(\alpha, t), P^\nu(\alpha, t), t)$$

であり, $\alpha_t{}^0$ は地図帳 $\mathscr{H}_t$ の始点, $l[\alpha^0, \alpha_t{}^0]$ は点 α^0 と $\alpha_t{}^0$ とを結び膜 R_t に含まれる道である.

ここに与えられた解は非常に優秀なもので, 実際この形の解の1次結合により, 方程式(3.1)の解で次のような任意の初期値に対応するものを作ることができる.

$$\frac{\partial^{i-1} u}{\partial t^{i-1}} = K^{0, \alpha^0}_{A, \Gamma^i, R_z}\varphi_i(\alpha), \quad (i = 1, \cdots, s).$$

ここに Γ^i $(i=1, \cdots, s)$ は任意の Lagrange 部分多様体, $\varphi_i(\alpha)$ は空間 H に値を

1)〔訳注〕 この結果は定理 4.1 の第2の場合と同じ輸送方程式を解いて得られるが, ここでは解を具体的に記している(定理 6.1 参照). (3.1)に h^s(正確には A^{-s})を乗じ $-ih\partial/\partial x$ につき整理してみれば B が $i\partial L/\partial h|_{h=0}$ に相当することがわかる.

となる Γ^i 上の有界な台を持つ任意の無限回微分可能なベクトル函数である．これには特に Courant の書物[1]で扱われている振動初期値や不連続初期値の場合が含まれる．このことは次の注意から得られる：

以前のように定理 4.3 の等式の両辺に作用素 A^N を施すことができる．このとき等式の両辺からは第1章§1-2° の意味での一般函数が得られる．函数 $A^N u(x,t)$ はいま考えている方程式の一般函数解である．ゆえにもし $A=i\partial/\partial\tau$ ととり，H を変数 τ に関する $L_2[\boldsymbol{R}^1]$ 空間とすれば，$\varphi(\alpha)=g(\tau)f(\alpha)$ とおくことができる．ここに $g(\tau)$ は連続函数の N 階導函数であるような一般函数であり，$f(\alpha)$ は実数直線に値を持つ台が有界な函数である．

振動初期値の場合は H として変数 ω の区間$[1,\infty]$上の2乗可積分函数の空間 $L_2[1,\infty]$を，また A として ω による掛け算作用素をとらねばならない．$\varphi(\alpha)=gf(\alpha),\ g=\dfrac{1}{\omega}\in L_2[1,\infty]$であり，したがって $Ag=1$．函数 $Au(x,t)$ はパラメーター ω に依存し

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma_t,R_z}=K^{\gamma,\alpha^0}_{\omega,\Gamma_t,1/\omega}.$$

§4 作用素係数の方程式の固有値の漸近形

空間 B^∞ を考察する．ただし B^1 は Hilbert 空間とする．§2で導入した作用素

$$\hat{L}=L\left(x_1,\cdots,x_n,-ih\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n},h\right)$$

を考えよう．ここでさらに作用素 $\hat{L}$ は t,p_{n+1} に依存しないという仮定をおく．さて，この作用素は B^1 に値をとる $x_1,\cdots,x_n$ の函数の作る Hilbert 空間 $L_2[B^1]=W_2{}^0[\boldsymbol{R}^n,B^1]$において自己共役で，§2においてこの作用素に課された条件1が満たされているとしよう．さらに $\lambda=E^0$ は作用素 $\hat{L}$ の極限スペクトルではないとする．$\varepsilon>0$ とし，$E\in\mathscr{E}=(E^0-\varepsilon,E^0+\varepsilon)$ に対し境界を持たないコンパクトな閉じた Lagrange 多様体 $\Gamma(E)$ の族で次の諸条件を満たすものが存在すると仮定しよう[1]．1) $\Gamma(E)$ は E に連続に依存する．2) $\alpha\in\Gamma(E)$ に対し $H(p(\alpha),q(\alpha))=E$ ($H(p,q)$ は作用素 $\hat{L}$ の Hamilton 函数)．3) $u_{0,t}\Gamma(E)=\Gamma_t(E)=\Gamma(E)$[2]．

1) 集合 $\mathscr{E}$ は区間$(E^0-\varepsilon,E^0+\varepsilon)$と一致する必要はない．この区間内で稠密ならば十分である．

2) 作用素 $u_{0,t}$ は作用素 $\hat{L}$ の Hamilton 函数(すなわち作用素 $L(x,p,0)$ の固有値) $H(p,x)$ に対応する Hamilton 系の軌道に沿う推移作用素である．

多様体 $\Gamma(E)$ 上の測度 $\sigma(\alpha)$ としては Hamilton 系の軌道に沿う推移で不変なものをとることにする．この測度に関する $\Gamma(E)$ 上の2乗可積分函数の作る空間において $\Gamma(E)$ 上の作用素

$$R = i\frac{d}{dt} + iG = i\frac{d}{dt} + i\left\| \left(\chi_\nu, \frac{d\chi_\mu}{dt}\right) + \left(\chi_\nu, \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right]\frac{\partial \chi_\mu}{\partial p_i}\right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i}\delta_{\mu\nu} + i\left(\chi_\nu, \left.\frac{\partial \hat{L}}{\partial h}\right|_{h=0}\chi_\mu\right)\right\|_{\substack{p=P(\alpha,t)\\ x=Q(\alpha,t)}}$$

は自己共役である[1)]．$\mu(E)$ をその固有値，$\xi_\nu(\alpha)$ をそれに対応する固有函数としよう．

定理 4.4 $\{E^i; i=1, \cdots, i_0\} \subset \mathcal{E}$ は h に依存する $\mathcal{E}$ の部分集合で，$\Gamma(E^i)$ 上次の方程式系が満たされているものとする．

$$\frac{2}{\pi h}\oint_k p(\alpha)dq(\alpha) = l_k \pmod 4, \qquad (1 \leqq k \leqq k_0) \tag{4.1}$$

ここに $\oint_k$ は多様体 $\Gamma(E^i)$ の第 k 番目の基底サイクルに沿う積分を表わす．l_k はこの基底サイクルの指数，k_0 は多様体 $\Gamma(E^i)$ の1次元 Betti 数である．このとき作用素 $\hat{L}$ の固有値の部分列 λ^i で

$$\lambda^i = E^i - h\mu(E^i) + O(h^2) \tag{4.2}$$

を満たし，また作用素 $\hat{L}$ の区間

$$\Delta\lambda = \{\lambda^i - o(h), \lambda^i + o(h)\}$$

に対するスペクトル函数 $E_{\Delta\lambda}$ は

$$\left\|[1-E_{\Delta\lambda}]K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^i),h}\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\chi_\nu(\alpha)\right\|_{L_2[\boldsymbol{R}^n, B^1]} = O(h) \tag{4.3}$$

を満たすものが存在する[2)]．

$r=1$ で $\chi(p,x)$ が実，また行列 $G=0$ の場合には上は多様体 Γ 上の Hamilton 系に沿う推移作用素(または作用素 id/dt)の固有値や固有函数の探索の問題に帰着することに注意しよう．この問題は広く研究されている[3)]．さらにこのときは $\mu=0, \xi(\alpha)=1$ ととることができる．

---

1) ここでのスカラー積は B^1 におけるものであったことを思い出そう．なお $L(x,p,0) \equiv H(p,x)$ のときは $R = i\frac{d}{dt} - \frac{i}{2}\sum\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i} - \left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}$ となる．

2) 定理 4.4 は $n=1$ で $L(x,p,h)$ が行列を係数とする p の多項式の場合，すなわち m 階の線型方程式系の場合にも自明ではない．

3) そうでない場合は Адрианова [1] を見よ．

例として次の Hamilton 作用素を考えよう．

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2M}\Delta_1 - \frac{h^2}{2M}\Delta_2 + \frac{e}{|\bar{r}_1-\bar{r}_2|} + \hat{H}_N(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|) \qquad (4.4)$$

ここに

$$\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad \bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\Delta_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^2, \qquad (i = 1, 2)$$

であり，e は電荷，$\hat{H}_N(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ は2個の静陽子場における N 電子系に対する一般型 Hamilton 作用素である(たとえば Schiff[1]を見よ)．Hamilton 作用素 $\hat{H}$ は2原子分子に対応している．

$E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ を作用素 $\hat{H}_N(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ の固有値(いわゆる電子ターム)の一つとする．函数

$$u(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|) = \frac{e}{|\bar{r}_1-\bar{r}_2|} + E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$$

は極小を持つ(すなわちターム $E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ は安定である)と仮定する(たとえば Ландау–Лифшиц[1]を見よ)．簡単のため普通行なわれるようにこの極小はただ一つであると仮定する．(この条件は本質的ではない．)

作用素 $\hat{H}$ の固有値で点 λ^0 の近くにあり，かつ函数 $u(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ の極小値と最大値の間に存在するものの漸近形を求めよう．この範囲において $\hat{H}$ のスペクトルは離散的である(Глазман[1]を見よ)．固有値 $E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ の重複度は $u(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)\leqq\lambda^0$ なる領域 Ω の点 $|\bar{r}_1-\bar{r}_2|$ に対して一定であると仮定する．すなわち，この領域内ではターム $E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ はどの二つも互いに交わらないとする．いま重複度は1に等しいとしよう．このとき B^∞ として $W_2^\infty[\boldsymbol{R}^{3N}]$ をとるならば以上の仮定のもとに作用素 $\hat{H}_N(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ が条件1を満たし，また作用素 $\hat{H}$ が定理4.4の条件を満たすことが容易に示される．

分子の線型次元を a で表わそう．(4.4)において無次元の変数に移行するため $\rho_1=r_1/a, \rho_2=r_2/a$ とおき(4.4)の両辺を $V_0=\min\limits_{|\bar{r}_1-\bar{r}_2|\in\Omega} E(|\bar{r}_1-\bar{r}_2|)$ で割れば作用素

$$\hat{\mathscr{H}} = -\frac{\nu^2}{2}\Delta_1 - \frac{\nu^2}{2}\Delta_2 + \frac{\alpha_1}{|\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_2|} + \hat{\mathscr{H}}_N[|\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_2|, \alpha_1, \alpha_2]$$

を得る．ここに

$$\nu=\frac{h}{a\sqrt{MV_0}},\qquad \alpha_1=\frac{e}{aV_0},\qquad \alpha_2=\frac{h}{a\sqrt{mV_0}}$$

であり(mは電子の質量), $\sum_{i=1}^{3}\partial^2/\partial\rho_{\sigma_i}{}^2\ (\sigma=1,2)$ を再び Δ_σ と記した．現実の分子においては $\nu\sim10^{-3}-10^{-4}$ であり $\alpha_1,\alpha_2\sim1$ だから ν を微小パラメーターと見なして方程式

$$\hat{\mathscr{H}}\psi_n=\lambda_n\psi_n$$

の $\nu\to0$ のときの漸近形を探求することができる．作用素 $\hat{\mathscr{H}}$ の Hamilton 函数は次の形をしている．

$$\frac{p_1{}^2}{2}+\frac{p_2{}^2}{2}+\frac{\alpha_1}{|\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_2|}+\frac{E(a|\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_2|)}{V_0}$$

これには次の Hamilton-Jacobi 方程式が対応する．

$$\left\{\frac{1}{2}(\nabla_1S)^2+\frac{1}{2}(\nabla_2S)^2\right\}+\frac{\alpha_1}{|\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_2|}+\frac{E(a|\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_2|)}{V_0}=\lambda^0. \qquad (4.5)$$

新変数

$$\bar{r}=\bar{\rho}_1-\bar{\rho}_2,\qquad \bar{R}=\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2$$

を導入しよう．変数 $\bar{R},\bar{r}$ に関する ∇ 作用素をそれぞれ $\nabla_{\bar{R}},\nabla_{\bar{r}}$ と記せば[1)]

$$\{(\nabla_{\bar{R}}S)^2+(\nabla_{\bar{r}}S)^2\}+\frac{\alpha_1}{r}+\frac{E(ar)}{V_0}=\lambda^0$$

を得る．こうして変数 $\bar{r}$ と $\bar{R}$ とは分離された．$S=S(\bar{r})$ とおけば極座標で

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\alpha_1}{r}+\frac{E(ar)}{V_0}=\lambda^0$$

を得る[2)]．

条件(4.1)は今の場合次の形になることが容易にわかる〔章末訳注参照〕．

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\sqrt{\left[\lambda^0-\frac{\alpha_1}{r}-\frac{E(ar)}{V_0}\right]-\frac{\alpha_\theta{}^2}{r^2}},\qquad \frac{\partial S}{\partial\theta}=\sqrt{\alpha_\theta{}^2-\frac{\alpha_\varphi{}^2}{\sin^2\theta}}$$

$$I_\varphi=2\pi\alpha_\varphi=2\pi m\nu$$

$$I_\theta=\oint\sqrt{\alpha_\theta{}^2-\frac{\alpha_\varphi{}^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta=2\pi(\alpha_\theta-\alpha_\varphi)=\pi(2l+1)\nu$$

---

1)〔訳注〕 原著では次式の左辺第1項に因子1/2がついているが計算間違いと思われるので以下これに応ずる修正をした．

2)〔訳注〕 Hamilton 函数が和の形に変数分離されたので，対応する Lagrange 多様体で $\bar{R}$ に関するものと $\bar{r}$ に関するものとの直積の形のものが存在する．特に前者として $\nabla_{\bar{R}}S=0$(重心座標系に相当)をとれば，後者はこの Hamilton 函数に対応するものとなる．なお右辺の λ^0 は定理4.4で E と書かれたもの．

$$I_r = 2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left[\lambda^0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{E(ar)}{V_0}\right] - \frac{(I_\theta + I_\varphi)^2}{4\pi^2 r^2}}\, dr = \pi(2n+1)\nu$$

ここに r_1, r_2 は根号内の式の零点である．以上により

$$\lambda_k = \lambda_k{}^0 + O(\nu^2)$$

となる．ここに，$\lambda_k{}^0$ は方程式

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\lambda_k{}^0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{E(ar)}{V_0} - \frac{(l+1/2)^2\nu^2}{r^2}}\, dr = \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\nu$$

を満たす．この問題に対しては有名な Born-Oppenheimer の近似法(断熱法)は $k \sim 1$ という付加条件のもとでのみ適用できることを注意しておこう(Schiff [1]を見よ)．

〔訳注〕 対応する Hamilton-Jacobi 系から

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(p_\theta{}^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} p_\varphi{}^2\right) = 0$$

がわかるから，Hamilton 流について閉じた Lagrange 多様体は

$$p_\varphi = \alpha_\varphi \quad (\mathrm{const}), \qquad p_\theta{}^2 + \frac{\alpha_\varphi{}^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta{}^2 \quad (\mathrm{const}), \qquad p_r{}^2 + \frac{\alpha_\theta{}^2}{r^2} + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{E(ar)}{V_0} = \lambda^0,$$

$$\frac{dr}{dt} = 2p_r, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{r^2} p_\theta, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2}{r^2 \sin^2\theta} p_\varphi$$

の解曲線によって生成される．特にその内ではじめの三つの方程式で定まるものをとれば，3 次元トーラスに位相同型な Lagrange 多様体を得る．このとき Betti 数は 3，基底サイクルとして次のものがとれる：

1) $r = \mathrm{const} \quad \theta = \mathrm{const} \quad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ （指数 0），

2) $r = \mathrm{const} \quad \varphi = \mathrm{const} \quad p_\theta{}^2 + \dfrac{\alpha_\varphi{}^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta{}^2$ （指数 2），

3) $\theta = \mathrm{const} \quad \varphi = \mathrm{const} \quad p_r{}^2 + \dfrac{\alpha^2}{r^2} + \dfrac{\alpha_1}{r} + \dfrac{E(ar)}{V_0} = \lambda^0$ （指数 2）．

各サイクルに対応して条件(4.1)を書き下したものが本文の以下の式である．

第5章　波動型方程式に対する局所的特性表現

不連続な，あるいは速く振動する(rapid oscillation)初期値に対する双曲型方程式系の解の，局所的，すなわち十分小さい時刻tに対する漸近表示については数学の文献にみられる(Gårding–Kotake–Leray[1], Бабич[1], Lax[1]–[2], Courant–Lax[1], Courant–Hilbert[1], Ludwig[1], Hadamard[1], Алексеев-Гельчинский[1]).

一方，量子力学の方程式に対する局所的準古典近似は上述の問題とまったく類似しておりГлезер[1], Groenewold[1]等の物理の文献に述べられている(また Birkhoff[1], Gårding–Kotake–Leray[1], Маслов[1]).

この章では，これらの公式の証明を，摂動論における定理3.2と逆作用素の評価をすることにより示す[1)].

これらの公式の数学的正当化はおおまかにいうと次のようになる.

(1)　漸近式を方程式に代入すれば$O(\omega^{-N})$の誤差をもって満足していることを示す.

(2)　逆作用素の評価. すなわち真の解と形式的漸近解の差を評価することである.

漸近公式は焦点においては無限大となることに注意する. またトンネル型の方程式に対しては，この方法は使えないことを注意しておこう. われわれはここでは後でトンネル型方程式へ転用が可能な方法で証明を与えよう. その証明法は抽象的摂動論における定理3.2と定理3.6を使用する. これは証明を簡易化し，他方において方程式の係数の滑らかさを要請する.

1)　$1/h$を$i\partial/\partial s$におきかえることにより，双曲型方程式系に対して考察されたLudwig[1]における問題と類似のそれに帰着される. しかしながらLax, Ludwigの理論において用いられた方法は使えない. Schrödinger 方程式の場合，それは特性多様体上に初期値を与える問題となり，Lerayの一意化(uniformization)の理論にものらない. 相対論的な場合は，平面$t=0$は空間的(space-like)にすらならない. これらの付加的困難さは，原点が作用素$i\partial/\partial s$のスペクトル点であるにもかかわらず$1/h\neq 0$であることに関連している.

§1 Schrödinger 方程式の解の局所的漸近形

1° 準古典的表現

まず Schrödinger 方程式に対して特性(準古典的)表現を構成しよう;

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + v(x)\psi \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{1.1}$$

対応する陪特性方程式系は Hamilton の方程式で

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \\ &\dot{S} = \sum_{i=1}^{n} p_i H_{p_i} - H \end{aligned} \tag{1.2}$$

の型をしている．函数 H は C^3 クラスとしよう．

方程式系(1.2)が n 個のパラメーター $\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ を含み，互いに交わらない解 $x(\beta, t)$, $p(\beta, t)$ をもつとしよう．

補題 5.1 Jacobi 行列式 $Y^{-1}=\det\|\partial\beta_i/\partial x_j\|$ は次の連続の方程式を満足する．

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial t} + \mathrm{div}(Y^{-1}\mathrm{grad}\, S) = 0$$

証明 $Y=\det\|\partial x_i/\partial\beta_j\|$ の t に関する微分 dY/dt を考えよう．Y において i 行の要素を $\partial^2 x_i/\partial t\partial\beta_j$ でおきかえたものを D_i とすれば

$$\frac{dY}{dt} = \sum_{i=1}^{n} D_i$$

を得る．

$$\frac{\partial x_i(\beta, t)}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x_i}$$

であるから(Петровский[3])

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\partial\beta_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\beta_j}$$

したがって

$$D_i = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} Y$$

を得る．すなわち

$$\frac{dY}{dt} = Y\cdot\Delta S.$$

これより

$$\frac{dY^{-1}}{dt}+Y^{-1}\Delta S=0.$$

結局

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial t}+\mathrm{grad}\ Y^{-1}\cdot\mathrm{grad}\ S+Y^{-1}\Delta S=0$$

であり，これより補題の主張が得られる．

$Y^{-1/2}$ に対しては

$$2\frac{\partial}{\partial t}Y^{-1/2}+\mathrm{div}(Y^{-1/2}\mathrm{grad}\ S)+\mathrm{grad}\ S\cdot\mathrm{grad}\ Y^{-1/2}=0 \qquad (1.3)$$

を得る．

さて，方程式(1.1)の特性表現を求めよう．

$$\psi(x,t)=Y^{-1/2}e^{iS(x,t)/h}\varphi(x,t) \qquad (1.4)$$

とおく．微分可能な函数 $R(x)$ に対して

$$-ih\frac{\partial}{\partial x_i}R(x)e^{iS(x)/h}=e^{iS(x)/h}\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)R(x)$$

が成り立ち，一方

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla S)^2+v(x)=0$$

であるから，

$$ih\frac{\partial}{\partial t}(Y^{-1/2}\varphi)=-\frac{1}{2}h^2\Delta(Y^{-1/2}\varphi)-\frac{1}{2}ih[\mathrm{div}(Y^{-1/2}\varphi\ \mathrm{grad}\ S)+\mathrm{grad}\ S\cdot\mathrm{grad}(Y^{-1/2}\varphi)].$$

結局

$$ih\left\{\frac{\partial Y^{-1/2}}{\partial t}+\frac{1}{2}[\mathrm{div}(Y^{-1/2}\mathrm{grad}\ S)+\mathrm{grad}\ S\cdot\mathrm{grad}\ Y^{-1/2}]\right\}\varphi+ihY^{-1/2}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{grad}\ S\cdot\mathrm{grad}\ \varphi\right\}=-\frac{h^2}{2}\Delta(Y^{-1/2}\varphi). \qquad (1.5)$$

変換

$$\varphi(x,t)=\varphi(x(\beta,t),t)=\tilde{\varphi}(\beta,t)$$

を行なうと，

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{grad}\ \varphi\cdot\mathrm{grad}\ S \qquad (1.6)$$

となる．(1.5)と(1.6)より

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{ih}{2} Y^{1/2}\Delta_\beta Y^{-1/2}\tilde{\varphi}(\beta, t) \tag{1.7}$$

を得る．Δ_β は曲線座標 β における Laplace の作用素である．この式はまた Schrödinger 方程式の局所的特性表現でもある．

2° 逆作用素の評価

Hamilton 作用素

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta + v(x, t) \tag{1.8}$$

を $L_2[\boldsymbol{R}^n]$ において考えよう．

$L_1[L_2]$ でもって，区間 $0 \leqq t \leqq t_0$ で定義された $L_2[\boldsymbol{R}^n]$ の値をとる Bochner 可積分函数を表わす．そのノルムは $g \in L_1[L_2]$ に対して

$$\|g\|_{L_1[L_2]} = \int_0^{t_0} \sqrt{\int_{\boldsymbol{R}^n} |g(t, x)|^2 dx}\, dt$$

でもって定義する．V を $L_2[\boldsymbol{R}^n]$ と $L_1[L_2]$ との直積 Banach 空間とする．そのノルムは，$f \in L_2[\boldsymbol{R}^n]$, $g \in L_1[L_2]$, $\{f, g\} \in V$ に対して

$$\|\{f, g\}\|_V = \|f\|_{L_2} + \|g\|_{L_1[L_2]}$$

である．また $L_2[\boldsymbol{R}^n]$ の値をとる連続函数の空間を $C[L_2]$ で表わし，そのノルムを

$$\|g\|_{C[L_2]} = \max_{0 \leqq t \leqq t_0} \sqrt{\int_{\boldsymbol{R}^n} |g(t, x)|^2 dx}$$

とする．

次の作用素 $\hat{L}$ を考えよう．それは定義域を $C[L_2]$ 内にもち値域が V の作用素である：$g(t, x) \in D(\hat{L}) \subset C[L_2]$ に対して

$$\hat{L}g(t, x) = \left\{g(0, x),\ \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{i}{h}\hat{H}g(t, x)\right\} \in V.$$

第1部第4章補題 4.1 より $\|\hat{L}^{-1}\| \leqq \text{const.}$ がわかる．特に $v(x, t)$ が t に依存しない場合，$\hat{H}$ が自己共役作用素であることよりこのことはわかる．なぜなら，もし

$$\hat{L}u(t, x) = \{f(x), F(t, x)\}$$

であるならば

$$u(t, x) = \hat{L}^{-1}\{f(x), F(t, x)\} = e^{i\hat{H}t/h}f + \int_0^t e^{i\hat{H}(t-\tau)/h}F(\tau, \cdot)d\tau$$

であり，これより

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_2} \leqq \|f\|_{L_2} + \int_0^{t_0} \|F(\tau,\cdot)\|_{L_2} d\tau \tag{1.9}$$

を得る．よって

$$\max_{0\leqq t\leqq t_0} \|u(t,\cdot)\|_{L_2} \leqq \|f\|_{L_2} + \|F\|_{L_1[L_2]}. \tag{1.10}$$

さて，変数 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ の函数の空間 $\tilde{L}_2[\boldsymbol{R}^n]$ を導入する．そのノルムは

$$\|f\|_{\tilde{L}_2} = \sqrt{\int |f(\beta)|^2 d\beta}.$$

また，同様に $L_1[\tilde{L}_2]$, $\tilde{V}$, $C[\tilde{L}_2]$ を定義する．$\tilde{L}_2[\boldsymbol{R}^n]$ から $L_2[\boldsymbol{R}^n]$ へのユニタリ作用素 M を

$$(Mf)(\beta,t) = Y^{-1/2}(\beta(x,t),t)\exp\left\{\frac{i}{h}S(\beta(x,t),t)\right\} f(\beta(x,t),t)$$

でもって定義する．M のユニタリ性は $g(x,t)=Y^{-1/2}\exp\left\{\frac{i}{h}S(x,t)\right\} f(\beta,t)$ とすると，

$$\int |g(x,t)|^2 dx = \int |f(\beta,t)|^2 Y^{-1} dx = \int |f(\beta,t)|^2 d\beta$$

であることより示される．また M は $\tilde{V}$ を V へ，$L_1[\tilde{L}_2]$ を $L_1[L_2]$ へ，$C[\tilde{L}_2]$ を $C[L_2]$ へノルムを保ちながら写す．作用素 $\hat{L}$ は $C[\tilde{L}_2]$ 内に定義域をもち値域が $\tilde{V}$ に属する作用素 $\hat{L}_1$ に変換される．$\hat{L}_1$ は次の型の作用素である：

$$\hat{L}_1 u(t,\beta) = \left\{u(0,\beta), \frac{\partial u}{\partial t} + ih\hat{H}_1 u\right\}$$

ここで $\hat{H}_1 = -\frac{Y^{1/2}}{2}\Delta_\beta Y^{-1/2}$ である．

3° 摂動級数

$C[\tilde{L}_2]$ から $\tilde{V}$ への作用素 $\hat{L}_0$ と $\tilde{H}_1$ とを考えよう：

$$\hat{L}_0 u(t,\beta) = \left\{u(0,\beta), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\right\}$$

$$\tilde{H}_1 u(t,\beta) = \{0, \quad \hat{H}_1 u(t,\beta)\}.$$

$\hat{L}_1 = \hat{L}_0 + ih\tilde{H}_1$ となる．また $\|\hat{L}_0^{-1}\| \leqq t_0$, $\|\hat{L}_1^{-1}\| \leqq t_0$ である．さらに，もし $f(\beta), F(\beta,t)$ が $2k$ 回 β について微分可能で，ポテンシャル $v(x,t)$ が x について $2k$ 回微分可能であるならば，$\hat{L}_0^{-1}(\tilde{H}_1\hat{L}_0^{-1})^k\{f(\beta),F(t,\beta)\}$ は定義され $C[\tilde{L}_2]$ に

属する．したがって，第1部第3章§3の定理の条件は満たされている．任意の $g\in\tilde{V}$ に対して

$$\hat{L}_1^{-1}g=\sum_{i=0}^{k}h^i\hat{L}_0^{-1}(\tilde{H}_1\hat{L}_0^{-1})^i g+h^k z_h(t,\beta).$$

ここで $\|z_h(t,\beta)\|_{C[\tilde{L}_2]}\to 0\ (h\to 0)$, と表わされる．特に $g=\{0, F(t,\beta)\}$ であるならば，

$$\hat{L}_0^{-1}g=\int_0^t F(t',\beta)dt',\qquad \tilde{H}_1\hat{L}_0^{-1}g=\left\{0, \hat{H}_1\int_0^t F(t',\beta)dt'\right\},$$

$$(\tilde{H}_1\hat{L}_0^{-1})^2 g=\left\{0, \hat{H}_1\int_0^t \hat{H}_1 dt'\int_0^{t'}\hat{H}_1 F(t'',\beta)dt''\right\},\cdots.$$

したがって

$$\hat{L}_1^{-1}\{0, F(t,\beta)\}=\sum_{i=0}^{k}h^i\int_0^t \hat{H}_1 dt_1\cdots\int_0^{t_{i-1}}\hat{H}_1 dt_i\int_0^{t_i}F(t_{i+1},\beta)dt_{i+1}+h^k z_h(t,\beta).$$

同様に

$$\hat{L}_1^{-1}\{f(\beta), 0\}=\sum_{i=0}^{k}h^i\int_0^t \hat{H}_1 dt_1\int_0^{t_1}\hat{H}_1 dt_2\cdots\int_0^{t_{i-1}}\hat{H}_1 f(\beta)dt_i+h^k z_h(t,\beta).$$

よって

$$\frac{\partial u(t,\beta)}{\partial t}+ih\hat{H}_1 u(t,\beta)=0$$

$$u(0,\beta)=f(\beta)$$

の解は

$$u(t,\beta)=\sum_{i=0}^{k}h^i\int_0^{t_1}\hat{H}_1 dt_1\cdots\int_0^{t_{i-1}}\hat{H}_1 f(\beta)dt_i+h^k z_h(t,\beta)$$

という表現をもつ．ここで $\max\|z_h(t,\beta)\|_{\tilde{L}_2}\to 0\ (h\to 0)$ である．同様のことは，初期条件 $f(\beta)$ が h に解析的に依存している場合にも成り立つ．

もとの問題

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h}{2}\Delta\psi+\frac{v(x)}{h}\psi \tag{1.11}$$

$$\psi|_{t=0}=\psi_0=\varphi(x,h)\exp\left\{\frac{i}{h}S_0(x)\right\} \tag{1.12}$$

に適用すると次の定理を得る．

定理 5.1 Cauchy 問題(1.11), (1.12)の解は $v(x)\in C^4$, $\varphi(x,h)\in C^2$, $S_0(x)\in C^4$ のもとで

$$\psi = J^{-1/2}\exp\left(\frac{i}{h}\tilde{S}(\beta, t)\right)\varphi(\beta, h)+z_h(\beta, t) \qquad (1.13)$$

と表現できる．

この結果および以下の§の結果はポテンシャル v が t に依存している場合も成り立つ．

§2　抽象的な函数に対する埋め込み定理と可算ノルム空間における評価

1°　埋め込み定理

後で次の埋め込み定理を必要とする：

埋め込み定理　A を Hilbert 空間 H における逆をもつ自己共役作用素とし，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\|(1+\varepsilon A)^{-1}\|\leqq 1$ を満たしているとする．$a_n=((-1)^n+3)/4$ とする．$\Phi(x)\in L^2[\boldsymbol{R}^n, H]$ が $D((\partial/\partial x_i)^{[n/2]+1})$ および $D(A^{[n/2]+1})$ に属するならば

$$\text{ess. sup.} \|A^{a_n}\Phi(x)\|_H \leqq \text{const}$$

である．

証明　$F(x)=(1+A)^{[n/2]+1}\Phi(x)$ とおく．すなわち $\Phi(x)=(1+A)^{-[n/2]-1}F(x)$．$A(1+A)^{-1}=1-(1+A)^{-1}$ であるから，$\|A(1+A)^{-1}\|\leqq 2$．$F(x)$ の Fourier 変換を $\tilde{F}(p)$ とする．そのとき

$$\|A^{a_n}(1+A)^{-[n/2]-1}F(x)\| = \left\|\frac{(1+A)^{-[n/2]-1}A^{[n/2]+1}}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{iApx}\tilde{F}(p)dp\right\|$$

$$\leqq (2\pi)^{-n/2}\int \|\{A(1+A)^{-1}\}^{[n/2]+1}\tilde{F}(p)\|dp$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int\sqrt{1+(p^2)^{[n/2]+1}}\left\|\frac{\{A(1+A)^{-1}\}^{[n/2]+1}}{\sqrt{1+(p^2)^{[n/2]+1}}}\tilde{F}(p)\right\|dp$$

$$\leqq (2\pi)^{-n/2}\sqrt{\int\frac{dp}{1+(p^2)^{[n/2]+1}}}\sqrt{\int(1+(p^2)^{[n/2]+1})\|\{A(1+A)^{-1}\}^{[n/2]+1}\tilde{F}(p)\|^2dp}\,.$$

さて

$$\int\|\{A(1+A)^{-1}\}^{[n/2]+1}\tilde{F}(p)\|^2dp \leqq 2^{n+2}\int\|\tilde{F}(p)\|^2dp = 2^{n+2}\int\|F(x)\|^2dx$$

$$\int\|\{pA(1+A)^{-1}\}^{[n/2]+1}\tilde{F}(p)\|^2dp = \int\|\{(1+A)^{-1}(-\Delta)^{1/2}\}^{[n/2]+1}F(x)\|^2dx$$

$$= \int \| \{(-\Delta)^{1/2}\}^{[n/2]+1} \Phi(x) \|^2 dx.$$

もし$[n/2]+1$が偶数であるならば，定理の仮定から$\|A^{a_n}(1+A)^{-[n/2]-1}F(x)\|$の有界性が示される．$[n/2]+1$が奇数のときは次のことより得られる．等式

$$\int \|(-\Delta)^{1/2} f(x)\|^2 dx = -\int \langle f(x), \Delta f(x) \rangle dx = \int \|\nabla f(x)\|^2 dx$$

を用いると

$$\int \|(-\Delta)^{1/2}(-\Delta)^{[n/2]/2} \Phi(x)\|^2 dx = \int \|\nabla(-\Delta)^{[n/2]/2} \Phi(x)\|^2 dx.$$

これより，定理の仮定を用いると$\|A^{a_n}(1+A)^{-[n/2]-1}F(x)\|$の有界性がわかる．同様のことは負値自己共役作用素に対しても成り立つ．さらに一般の自己共役作用素に対しても$A=A^+ + A^-$と正負に分解すれば同様の結果を得ることができる．

注意 1　もし作用素Aが正定値であるとすれば，A^{-1}は存在して有界である．この場合は$(1+A)^{-1}$をA^{-1}でおきかえてよい．

2° 可算ノルム空間における作用素

次のようなノルムをもつ空間S_kを考えよう．

$$\|F\|_{k,l,m} = \sup_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ 0 < h \leq h_0}} \left| \left(ih \frac{\partial}{\partial t} \right)^k x^m p^l F(x,t,h) \right| \qquad (k, l, m = 1, 2, \cdots). \quad (2.1)$$

ここで$x^m = \prod_{j=1}^n x_j^{m_j}$, $\sum_{j=1}^n m_j = m$, $p^l = \prod_{\nu=1}^n \left(-ih \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^{l_\nu} \sum_{\nu=1}^n l_\nu = l$．また次の空間$R_h$を定義する．そのノルムは

$$\|F\|^2{}_{k,l,m} = \sup_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ 0 < h \leq h_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(ih \frac{\partial}{\partial t} \right)^k x^m p^l F(x,t,h) \right|^2 dx.$$

補題 5.2 a　$F(x,t,h) \in R_h$ならば

$$\Phi_{1/h}{}^{x_n} F(x,t,h) \in R_h$$

である．

証明　$\widetilde{F}(p,t,h) = \Phi_{1/h}{}^{x_n} F(x,t,h)$とおこう．

明らかに

$$p^\beta \left(ih \frac{\partial}{\partial p} \right)^\alpha \widetilde{F}(p,t,h) = \Phi_{1/h}{}^{x_n} \left(-ih \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta x^\alpha F(x,t,h).$$

したがって

$$\int\left|p^{\beta}\left(ih\frac{\partial}{\partial p}\right)^{\alpha}\tilde{F}(p,t,h)\right|^{2}dp=\int\left|\left(ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}x^{\alpha}F(x,t,h)\right|^{2}dx.$$

これより補題5.2aの主張は得られる.

明らかに S_h は R_h に埋め込まれる.

補題 5.2　$g(x,t,h)\in R_h$ ならば

$$h^{[n/2]+1}g(x,t,h)\in S_h. \tag{2.2}$$

証明　埋め込み定理から

$$\left|\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k}x^{m}\hat{p}^{l}g(x,t,h)\right|\leqq\frac{1}{h^{[n/2]+1}}(C_n\|g\|_{k,m,l}+C_n'\|g\|_{k,m,l+[n/2]+1}).$$

よって $h^{[n/2]+1}g(x,t,h)\in S_h\subset R_h$.

次に空間 $W_2{}^l(\hat{p})$ を定義しよう. そのノルムは

$$\|g\|_{W_2{}^l}{}^2=\sum_{i=1}^{l}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{p}^ig(x)|^2dx.$$

また, 次のノルムをもつ空間 $K_l(x,\hat{p})$ を定義しよう:

$$\|g\|_{K_l}{}^2=\sum_{i+j\leqq l}\int|\hat{p}^ix^jg(x)|^2dx.$$

定理 5.2　もし $y(x,h)\in S_h$ ならば $h^{[n/2]+1}\exp\left(\frac{i}{h}\hat{H}t\right)y(x,h)\in S_h$ である.

準備としてまず二つの補題を示そう.

補題 5.3　$v(x)$ は l 回微分可能で l 次までの導函数はすべて有界であるとしよう. そのとき, 作用素 $\exp\left(\frac{i}{h}\hat{H}t\right)(0<h\leqq h_0,\ 0\leqq t\leqq t_1)$ は $W_2{}^l(\hat{p})$ において一様有界である.

証明　Маслов[1]において示されている等式

$$\left[\hat{B},\exp\left(\frac{i}{h}\hat{H}t\right)\right]=\frac{i}{h}\int_0^t\exp\left\{\frac{i}{h}\hat{H}(t-t')\right\}[\hat{B},\hat{H}]\exp\left(\frac{i}{h}\hat{H}t'\right)dt' \tag{2.3}$$

を用いよう. ここで $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ である.

$g=\exp\left(\frac{i}{h}Ht\right)y$ とおく. 等式(2.3)より

$$\|\hat{B}g\|_{L_2}\leqq\|\hat{B}y\|_{L_2}+\frac{t}{h}\max_{0\leqq t\leqq t_1}\|[\hat{B},\hat{H}]g\|_{L_2} \tag{2.4}$$

を得る. 補題を帰納法により証明しよう. $l=0$ のときは明らかである. $l=k$ の

とき成り立っているとしよう．交換子$[\hat{p}^{k+1}, \hat{H}]=[\hat{p}^{k+1}, v(x)]$は$v(x)$の仮定より，${W_2}^k$から$L_2$への有界作用素である．不等式(2.4)から，もし$y \in {W_2}^{k+1}$であるならば，帰納法の仮定より$g \in {W_2}^k$であるから，したがってノルム$\|\hat{p}^{k+1}g\|_{L_2}$は有界である．これにより補題は示された．

補題 5.4　$v(x)$のl階以下の導函数は一様有界であるとする．そのとき$\exp\left(\frac{i}{h}\hat{H}t\right)$，$(0<h \leqq h_0, 0 \leqq t \leqq t_1)$は$K_l(x, \hat{p})$において一様有界である．

証明　帰納法で証明しよう．$g \in K_{l-1}$，$\|x^{m-1}\hat{p}^{l-m+1}g\|_{L_2}$は有界であると仮定する．$m=1$のとき，$\|\hat{p}^l g\|_{L_2}$の有界性は補題5.3より得られる．

等式

$$[x^m\hat{p}^{l-m}, \hat{H}]g = x^m[\hat{p}^{l-m}, v(x)]g+2ihmx^{m-1}\hat{p}^{l-m+1}g+\text{残余項}$$

において，残余項は，仮定により有界，第1項は$g \in K^{l-1}$であることより，そのL_2ノルムは有界である．第2項は帰納法の仮定よりL_2ノルムの有界性は得られる．(2.4)より$\|x^m\hat{p}^{l-m}g\|_{L_2}$は有界である．$l=1$に対しては帰納法の仮定は満たされているから補題の主張は示されたことになる．

さて定理5.2の証明を与えよう．補題5.2より$y(x, h) \in R_h$ならば$g=\exp\left(\frac{i}{h}\hat{H}t\right)y(x, h) \in R_h$を示せばよい．このためには$\left\|\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k g\right\|_{L_2}$が$0<h \leqq h_0, 0 \leqq t \leqq t_1$において一様有界であることを示せばよい．$y \in R_h$とすれば

$$\left\|\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k g\right\|_{L_2} = \left\|\exp\left(\frac{i}{h}\hat{H}t\right)\hat{H}^k y\right\|_{L_2} = \|\hat{H}^k y\|_{L_2}.$$

よって定理は証明された．

また次の定理も得られる．

定理 5.1 a　作用素$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{h}\hat{H}\right]^{-1}$は$R_h$を$R_h$へ写す．

同様のことはポテンシャルが時間に依存している場合にも成り立つ．この場合は第1部補題4.1の評価式(2.1)を用いる．定理5.1 aはDiracの方程式に対しても成り立つ．この場合の証明は定理4.1 aの証明と同様に行なえばよい．

定理5.1より次の定理を得る．

定理 5.2　Cauchy問題(1.11)，(1.12)の解は定理5.1に述べられた表現をもつ．ただし$z_h \in S_h$である．

証明　準古典近似への移行は，変換

$$\phi = Y^{-1/2}\left[\exp\frac{i}{h}S\right]u$$

を用いることによりできる. $u\in S_h$ ならば $\phi\in S_h$ であり, 逆も成り立つ. 次の補題を準備する.

補題 5.5 $A, C, U_i, i=1,2,\cdots,N$ を可算ノルム空間 B^∞ における線型作用素とする. 作用素 C は逆をもち A, U_i と可換であり, 全空間 B^∞ において定義されているとする. $\tilde{A}$ は作用素 A の制限であって可逆であり, $C^{-m}(A-\sum_{i=1}^{N}C^iU_i)$ の値域は B^∞ 全体であるとする.

さて, $Ax=0$ の解 $x_0, x_1, \cdots, x_{N_1+m+1}$ で次の条件を満たすものがあると仮定しよう : $f_0=x_0, f_k=x_k+\tilde{A}^{-1}\sum_{i=1}^{k}U_if_{k-i}$ とすると $f_k\,(k=0,1,\cdots,N_1+m+1)$ は $B=\sum_{i=1}^{N}C^{i-1}U_i$ の定義域に属する. このとき, 方程式

$$(A-\sum_{i=1}^{N}C^iU_i)y = F$$

の解であって

$$y = \sum_{k=0}^{N_1+m+1}C^kf_k+\sum_{k=0}^{N_1+m+1}C^k\tilde{A}^{-1}(B\tilde{A}^{-1})^kF+C^{N_1+1}f$$

と書けるものが存在する. ここで $f\in B^\infty$ は

$$\sum_{k=0}^{N+m}C^k\tilde{A}^{-1}(B\tilde{A}^{-1})^kF\in D(B)$$

を満たす適当な元である.

証明

$$\psi = \sum_{k=0}^{N_1+m}C^kf_k+\sum_{k=0}^{N_1+m}C^k\tilde{A}^{-1}(B\tilde{A}^{-1})^kF$$

に $A-CB$ を作用させよう. $A\tilde{A}^{-1}B=B, Ax_j=0$ であるから, $Af_k=\sum_{i=1}^{k}U_if_{k-i}$,

$$\begin{aligned}A\psi &= \sum_{n=1}^{N_1+m}C^n\sum_{i=1}^{n}U_if_{n-i}+\sum_{k=0}^{N_1+m}C^k(B\tilde{A}^{-1})^kF\\ &= \sum_{k=0}^{N_1+m-1}C^{k+1}\sum_{j=0}^{k}U_{j+1}f_{k-j}+\sum_{k=0}^{N_1+m}C^k(B\tilde{A}^{-1})^kF.\end{aligned}$$

ここで, $j>N$ に対しては $U_j=0$ とする. 明らかに

$$CB\psi = \sum_{j=1}^{N}C^jU_j\psi = C\sum_{i=0}^{N-1}C^iU_{i+1}\psi$$

$$= \sum_{k=0}^{N+m+N_1-1} C^{k+1} \sum_{i=0}^{k} U_{i+1} f_{k-i} + \sum_{k=1}^{N_1+m+1} C^k (B\tilde{A}^{-1})^k F.$$

したがって

$$[A - \sum_{i=1}^{N} C^i U_i]\phi = -\sum_{k=N_1+m}^{N+m+N_1-1} C^{k+1} \sum_{i=0}^{k} U_{i+1} f_{k-i} - C^{N_1+m+1}(B\tilde{A}^{-1})^{N_1+m+1}F + F$$
$$= C^{N_1+m+1} g + F.$$

結局

$$(A - CB)\phi = C^{N_1+m+1} g + F.$$

補題の条件より

$$C^{-m}(A - CB)v = g$$

を満たす v が存在する． $y = \phi - C^{N_1+1}v$ とおくと

$$(A - CB)y = (A - CB)\phi - (A - CB)C^{N_1+1}v = F.$$

これで補題の主張は示された．

補題 5.5 において $B^\infty = S_h$, $A = i\partial/\partial t$, $B = H_1$, $C = h$ とし，また $\tilde{A}$ として，$t = 0$ において初期条件を零とした作用素 $i\partial/\partial t$ を考える．

方程式 $i\partial\varphi/\partial t = 0$ の解は t に依存しない函数である．補題を

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + hH_1\right)u = F$$

に対して適用すると

$$u = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k h^k \sum_{j=0}^{k}\left(-i\int_0^t H_1 dt\right)^j \varphi_{k-j}$$
$$+ \sum_{k=0}^{N}(-h)^k \left(-i\int_0^t dt\right)\left(-iH_1\int_0^t dt\right)^k F + h^{N+1}f, \qquad f \in S_h,$$

と表わせる．すなわち (1.11), (1.12) の解 ϕ は (1.13) の形に書ける．

§3 相対論的方程式

1° Dirac の方程式

Dirac の方程式を考えよう：

$$ih\frac{\partial\phi}{\partial t} - e\Phi(x,t)\phi - c\gamma\left(ih\nabla + \frac{e}{c}\mathcal{A}(x,t)\right)\phi - \beta mc^2\phi$$
$$\equiv ih\frac{\partial\phi}{\partial t} - \hat{H}_m\phi = 0. \qquad (3.1)$$

ここで $\psi=\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, $\Phi(x,t)$ はスカラー・ポテンシャル, $\mathscr{A}(x,t)=\{\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3\}$ はベクトル・ポテンシャルである.

方程式(3.1)の解が初期条件

$$\psi|_{t=0}=\varphi_0(x)\exp\left\{\frac{i}{h}S_0(x)\right\} \tag{3.2}$$

を満たしているとしよう.

方程式(3.1)に対応する古典的な Hamilton-Jacobi の方程式は

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\Phi\right)^2-c^2\left(\nabla S-\frac{e}{c}\mathscr{A}\right)^2-m^2c^4=0 \tag{3.3}$$

である. (3.3)から $\partial S/\partial t$ は二つの値をもつ.

$$H^{\pm}(x,p,t)=e\Phi\mp c\sqrt{\left(p-\frac{e}{c}\mathscr{A}\right)^2+m^2c^2}$$

とおくと, 対応する Hamilton の方程式系は

$$\frac{dx_i^{\pm}}{dt}=\frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i^{\pm}}{dt}=-\frac{\partial H^{\pm}}{\partial x_i},$$
$$\frac{ds^{\pm}}{dt}=-H^{\pm}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i^{\pm}}p_i^{\pm} \qquad (i=1,2,3) \tag{3.4}$$

である. (3.4)の解で初期条件

$$x^{\pm}|_{t=0}=x_0, \qquad p^{\pm}|_{t=0}=\nabla S_0(x_0), \qquad s^{\pm}|_{t=0}=S_0(x_0)$$

を満たすものを

$$x^{\pm}(t)=X^{\pm}(x_0,t), \qquad p^{\pm}(t)=P^{\pm}(x_0,t), \qquad s^{\pm}(t)=S^{\pm}(x_0,t)$$

としよう. $\pm$ の符号に対応して二つの Hamilton-Jacobi の方程式の解が対応する. $\mathscr{A}(x,t)$, $\Phi(x,t)$, $S_0(x)$ は2階微分可能でかつ2次導函数まで有界であると仮定しよう. そのとき, t_0 を十分小さくえらべば, $0\leqq t\leqq t_0$ では方程式(3.4)の解は底空間において交差しない.

$$J^{\pm}(x_0,t)=\det\left\|\frac{\partial X_i^{\pm}(x_0,t)}{\partial x_{0j}}\right\|$$

は零ではなく, $X^{\pm}(x_0,t)=x$ は $x_0^{\pm}=x_0^{\pm}(x,t)$ と解ける.

$S^{\pm}(x,t)=S^{\pm}(x_0(x,t),t)$ は方程式(3.3)の解で, $S^{\pm}(x,0)=S_0(x)$ を満たす. 2階の Dirac の方程式は

$$\left[\left(ih\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)^2-c^2\left(ih\nabla+\frac{e}{c}\mathcal{A}\right)^2-m^2c^4+hR(x,t)\right]\chi=0 \tag{3.5}$$

という形をしている．ここで $R(x,t)$ は 4×4 行列で

$$R(x,t)=ec[(\sigma,\bar{H})+i(\alpha\bar{E})].$$

$\bar{E}(x,t)$, $\bar{H}(x,t)$ は電磁場ベクトル，$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ は Pauli 行列である (Schweber [1], Фок[2])．

初期条件

$$\chi|_{t=0}=\varphi_0(x)\exp\left\{\frac{i}{h}S_0(x)\right\}$$
$$ih\frac{\partial\chi}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\left\{e\Phi+c\gamma\left(ih\nabla-\frac{e}{c}\mathcal{A}\right)+mc^2\right\}\varphi_0\exp\left\{\frac{i}{h}S_0(x)\right\} \tag{3.6}$$

で，方程式(3.5)を解くと $\chi=\psi$ (ψ は(3.1), (3.2)の解)である(第1章参照)．$\beta(x_0,t)=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial X}{\partial t}(x_0,t)$ とおき，また

$$f=\exp\left\{-i\frac{1}{2mc^2}\int_0^\tau R[X(x_0,t),t]|_{t=t(\tau)}d\tau\right\}f_0.$$

ここで $\tau=\tau(x_0,t)=\int_0^t\sqrt{1-\beta^2(x_0,t)}\,dt$，とする．$f$ は方程式

$$i\frac{df}{d\tau}=\frac{1}{2mc^2}R[X(x_0,t),t]|_{t=t(\tau)}f,\qquad f(0)=f_0$$

を満たす．変換

$$\chi^\pm=\varphi^\pm|J^\pm|^{-1/2}\sqrt[4]{\frac{c^2-[\dot{X}^\pm(x_0,t)]^2}{c^2-[\dot{X}^\pm(x_0,0)]^2}}\exp\left\{\frac{i}{h}S^\pm(x,t)\right\}$$
$$\varphi^\pm[X^\pm(x_0,\tau),t^\pm(x_0,\tau)]=\theta_\pm(x_0,\tau) \tag{3.6 a}$$
$$\mathcal{H}^\pm(x_0,\tau)=\exp\left\{-\frac{i}{2mc^2}\int_0^\tau R[X^\pm(x_0,t),t]_{t=t(\tau)}d\tau\right\}\theta_\pm(x_0,\tau)$$

により，方程式(3.5)は電子(＋に対応する)および陽電子(－に対応する)に対するDirac 方程式の準古典近似が得られる：

$$\frac{\partial\mathcal{H}^\pm}{\partial\tau}=-\frac{ih}{2mc^2}\sigma_\pm(x_0,\tau)^{-1}J^{1/2}\Box_{x_0,\tau}|J|^{-1/2}\sigma_\pm(x_0,\tau)^{-1}\mathcal{H}_\pm \tag{3.6 b}$$ [1)]

ここで

1)〔訳注〕　この式は $\mathcal{A}(x,t)$, $\Phi(x,t)$ が定数の場合に成り立つ．そうでない場合は $\mathcal{A}(x,t)$, $\Phi(x,t)$ の導函数の項が必要である．

$$\sigma_{\pm}(x_0,\tau)=\sqrt[4]{\frac{c^2-[\dot{X}^{\pm}(x_0,t)]^2}{c^2-[\dot{X}^{\pm}(x_0,0)]^2}}\exp\left\{\frac{i}{2mc^2}\int_0^{\tau}R(X^{\pm}(x_0,t),t)|_{t=t(\tau)}d\tau\right\},$$

$\Box_{x_0,\tau}$ は曲線座標に関する d'Alembert 作用素である．この結果は補足から同様に得られる(§5 輸送方程式の解を参照)．$\mathscr{A}(x,t), \Phi(x,t), S_0(x)$ は十分滑らかであるとしよう．さて

$$\frac{\partial \mathscr{H}_n{}^{\pm}}{\partial\tau}=-\frac{ih}{2mc^2}\sigma_{\pm}(x_0,\tau)^{-1}J^{1/2}\Box_{x_0,\tau}J^{-1/2}\sigma_{\pm}(x_0,\tau)\mathscr{H}_{n-1}{}^{\pm}$$

$$\mathscr{H}_0{}^{\pm}=F^{\pm}(x_0,h),\qquad \mathscr{H}_n{}^{\pm}|_{\tau=0}=0\quad(n>0),\qquad \mathscr{H}_{-1}=0$$

としよう，ここで $F^{\pm}(x_0,h)$ は x_0 と h について十分滑らかな函数である．

$$\chi_N{}^{\pm}=\exp\left\{\frac{i}{h}S^{\pm}(x,t)\right\}\sigma_{\pm}|J^{\pm}|^{-1/2}\left\{\sum_{n=0}^{N}\mathscr{H}_n{}^{\pm}\right\}\Big|_{x_0=x_0{}^{\pm}(x,t)} \tag{3.6 c}$$

としよう．

Dirac 方程式(3.1)の解 $\psi^{\pm}$ で

$$\begin{aligned}&\psi^{+}-\chi_N{}^{+}=h^{N+1}z(x,t,h)\\&\psi^{-}-\chi_N{}^{-}=h^{N+1}z_1(x,t,h)\\&z(x,t,h)\in S_h,\qquad z_1(x,t,h)\in S_h\end{aligned} \tag{3.6 d}$$

を満たすものが存在することは定理5.2の証明と同様にいえる．その際，方程式(3.5)の解に対する，Schrödinger 方程式に対して得られたと同様の評価式を使わねばならない．すでに定理4.1に関する注意の中で述べているように，すべての議論は Schrödinger 方程式に対応して1階の Dirac の方程式(3.1)の場合に移行できる．

2° 2階の Dirac 方程式および Klein–Gordon–Фок の方程式の解の評価

(3.5)の作用素を Q_m で表わそう．Q_m は，十分滑らかな $\tilde{L}_2$–値函数 $u(x,t)\in C(\tilde{L}_2)$ で $u(x,0)=u_t(x,0)=0$ を満たすものに対して定義されている．$\tilde{L}_2$ は L_2–値函数のベクトルを表わす．$L_{\pm m}$ は $C(\tilde{L}_2)$ における閉作用素

$$L_{\pm m}u(x,t)=ih\frac{\partial u}{\partial t}-\hat{H}_{\pm m}u,\qquad u(x,0)=0$$

を表わす．$\hat{H}_{\pm m}$ は(3.1)で定義された作用素である．

定理 5.3　作用素 $h(L_m)^{-1}, h(L_{-m})^{-1}$ は R_h を R_h に写す．

この定理は定理5.1aと同様に証明できる．容易にわかるように(Schweber

[1])

$$Q_m = L_m L_{-m} = L_{-m} L_m$$

であり $D(L_m)=D(L_{-m})$ である．また

$$2mc^2 = L_{-m} - L_m$$

であるから

$$Q_m{}^{-1} = L_{-m}{}^{-1} L_m{}^{-1} = \frac{1}{2mc^2}(L_m{}^{-1} - L_{-m}{}^{-1}).$$

よって次の定理を得る．

定理 5.4 評価式

$$\max \sqrt{\int |Q_m{}^{-1} f(x,t)|^2 dx} \leqq \frac{1}{mc^2 h} \int_0^t \{|f(x,t)|^2 dx\}^{1/2} dt$$

が成り立つ．

$\tilde{L}_{\pm m}$ を空間 $C(\tilde{L}_2)$ から $\tilde{L}_2 \oplus C(\tilde{L}_2)$ への次の作用素とする：

$$\tilde{L}_{\pm m} u(x,t) = \left\{ u(x,0), ih\frac{\partial u}{\partial t} - \hat{H}_{\pm m} u(x,t) \right\}.$$

また作用素 $\tilde{Q}_m$ を $C(\tilde{L}_2)$ から $\tilde{L}_2 \oplus \tilde{L}_2 \oplus C(\tilde{L}_2)$ への次の型の作用素とする：

$$\tilde{Q}_m u(x,t) = \left\{ u(x,0), ih\frac{\partial u}{\partial t}(x,0), \left[\left(ih\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right)^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. - c^2 \left(ih\nabla + \frac{e}{c} A \right)^2 - m^2 c^4 + hR(x,t) \right] u \right\}.$$

次の式が成り立つ：

$$\tilde{Q}_m{}^{-1} \{y_1, y_2, 0\} = \frac{1}{2mc^2} [\tilde{L}_m{}^{-1} \{y_2 - \hat{H}_{-m} y_1, 0\} + \tilde{L}_{-m}{}^{-1} \{-y_2 + \hat{H}_m y_1, 0\}] \tag{3.7}$$

なぜなら，両辺に $\tilde{Q}_m$ を施してみよう．

$$ih \frac{\partial \tilde{L}_{\pm m}{}^{-1} \{y, 0\}}{\partial t} \bigg|_{t=0} = \hat{H}_{\pm m} \tilde{L}_{\pm m}{}^{-1} \{y, 0\}|_{t=0} = \hat{H}_{\pm m} y$$

であるから，

$$\begin{aligned} &\tilde{Q}_m [\tilde{L}_m{}^{-1} \{y_2 - \hat{H}_{-m} y_1, 0\} + \tilde{L}_{-m}{}^{-1} \{-y_2 + \hat{H}_m y_1, 0\}] \\ &= \{y_2 - \hat{H}_{-m} y_1 - y_2 + \hat{H}_m y_1, \hat{H}_m (y_2 - \hat{H}_{-m} y_1) + \hat{H}_{-m} (-y_2 + \hat{H}_m y_1), 0\} \\ &= 2mc^2 \{y_1, y_2, 0\}. \end{aligned}$$

定理 5.2 と同様に次の定理を得る．

定理 5.5　もし $y\in S_h$ ならば，$h^{[n/2]+1}\tilde{L}_m{}^{-1}\{y,0\}\in S_h$ である．

また等式(3.7)より次の諸定理が得られる．

定理 5.6　もし $y,y_1\in S_h$ ならば $h^{[n/2]+1}\tilde{Q}_m{}^{-1}\{y,y_1,0\}\in S_h$ である．

定理 5.5 a　もし $y\in R_h$ ならば，$\tilde{L}_m{}^{-1}\{y,0\}\in R_h$ である．

定理 5.6 a　もし $y,y_1\in R_h$ ならば，$\tilde{Q}_m\{y,y_1,0\}\in R_h$ である．

定理 5.7　方程式(3.1)の解 $\psi^{\pm}$ で次の条件を満たすものが存在する：

$$\psi^{+}-\chi_N{}^{+}(x,t)=h^{N+1}z(t,x,h)$$
$$\psi^{-}-\chi_N{}^{-}(x,t)=h^{N+1}z_1(t,x,h)$$
$$z(t,x,h),\ z_1(t,x,h)\in S_h$$

同様の主張を Klein-Gordon-Фок の方程式

$$K=Q_m-hR(x,t)$$

について考察しよう．K^{-1} の形式的冪級数は

$$K^{-1}=Q_m{}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}h^k(RQ_m{}^{-1})^k \tag{3.8}$$

である．この級数は収束する．なぜなら

$$\|RL_m{}^{-1}f\|_{\tilde{L}_2}\leqq\|R\|\frac{1}{h}\int_0^t\|f\|_{\tilde{L}_2}dt$$

であるから，

$$Q_m{}^{-1}=\frac{1}{2mc^2}(L_m{}^{-1}-L_{-m}{}^{-1})$$

より

$$\|RQ_m{}^{-1}f\|_{\tilde{L}_2}\leqq\frac{\|R\|}{mc^2h}\int_0^t\|f\|_{\tilde{L}_2}dt$$

が成り立つ．したがって

$$\|(RQ_m{}^{-1})^kf\|_{\tilde{L}_2}\leqq\frac{\|R\|^k}{(mc^2h)^k}\int_0^{t_0}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{k-1}}\|f\|_{\tilde{L}_2}dt_k$$
$$\leqq\frac{\|R\|^k}{(mc^2h)^k}\frac{t_0{}^k}{k!}\max_t\|f\|_{\tilde{L}_2}.$$

これより

$$\|K^{-1}\|\leqq\frac{\text{const}}{h}$$

を得る．

次の可算ノルムをもつ空間 $\tilde{S}_h$ を考えよう：

$$\|\varphi(x,t,h)\|_l = \max_{\substack{0\leqq t\leqq t_0\\ 0<h\leqq 1}}\left\{\int|\hat{p}^l\varphi(x,t,h)|^2dx\right\}^{1/2}\qquad\left(\hat{p}=-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

定理 5.8　Klein–Gordon–Фок の方程式の係数は C^∞ であるとする．このとき hK^{-1} は $\tilde{S}_h$ から $\tilde{S}_h$ への連続な作用素である．

証明　まず

$$\|\hat{p}^lRL_m{}^{-1}\varphi\|_{\tilde{L}_2}\leqq\frac{C_l}{h}\int_0^t\sum_{j=0}^l\|\hat{p}^j\varphi\|_{\tilde{L}_2}dt$$

を証明しよう．l に関する帰納法で示そう．$l=0$ のときは主張は正しい．$l\leqq N-1$ のとき，成り立つとする．$\|\hat{p}^NRL_m{}^{-1}\varphi\|_{\tilde{L}_2}$ を評価しよう．等式$[A,B^{-1}]=-B^{-1}[A,B]B^{-1}$ より

$$\begin{aligned}\|\hat{p}^NRL_m{}^{-1}\varphi\|_{\tilde{L}_2}\leqq&\|RL_m{}^{-1}\hat{p}^N\varphi\|_{\tilde{L}_2}+\|[\hat{p}^N,R]L_m{}^{-1}\varphi\|_{\tilde{L}_2}\\&+\|RL_m{}^{-1}[\hat{p}^N,L_m]L_m{}^{-1}\varphi\|_{\tilde{L}_2}\end{aligned}$$

右辺の第1項は

$$\|RL_m{}^{-1}\hat{p}^N\varphi\|_{\tilde{L}_2}\leqq\frac{\text{const}}{h}\int_0^t\|\hat{p}^N\varphi\|_{\tilde{L}_2}dt$$

と評価できる．他の項は定理の条件と帰納法の仮定より，

$$\|[\hat{p}^N,R]L_m{}^{-1}\varphi\|_{\tilde{L}_2}+\|RL_m{}^{-1}[\hat{p}^N,L_m]L_m{}^{-1}\varphi\|_{\tilde{L}_2}\leqq\frac{\text{const}}{h}\int_0^t\sum_{j=0}^{N-1}\|\hat{p}^j\varphi\|_{\tilde{L}_2}dt.$$

したがって帰納法は完了した．よって

$$\|\hat{p}^lRQ_m{}^{-1}\varphi\|_{\tilde{L}_2}\leqq\frac{\text{const}}{h}\int_0^t\sum_{j=0}^l\|\hat{p}^j\varphi\|_{\tilde{L}_2}dt$$

を得る．よって(3.8)の $\tilde{L}_2$- 収束性の証明と同じようにして

$$\|\hat{p}^lh^k(RQ_m{}^{-1})^k\varphi\|_{\tilde{L}_2}\leqq\frac{(C_l)^k}{k!}t_0{}^k\max_{0\leqq t\leqq t_0}\sum_{j=0}^l\|\hat{p}^j\varphi\|_{\tilde{L}_2}$$

を得る．この評価式および $\varphi\in\tilde{S}_h$ ならば $hQ_m{}^{-1}\varphi\in\tilde{S}_h$ という事実から，(3.8)の級数は $\tilde{S}_h$ の意味でも収束し $hK^{-1}\varphi\in\tilde{S}_h$ を得る．

$\varphi\in R_h,\ u=hK^{-1}\varphi$ としよう．さて

$$Kx_iu=[K,x_i]u+hx_i\varphi=hf+hx_i\varphi\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

ここで $f=\dfrac{1}{h}[K,x_i]u$, とすると上の証明より $f\in\tilde{S}_h$. また条件より $x_i\varphi\in\tilde{S}_h$. よって上述の式より $x_iu\in\tilde{S}_h$. これをくり返すと $x_i{}^lu\in\tilde{S}_h$ を得る．すなわち

$u \in R_h$ である．したがって，作用素 hK^{-1} は R_h から R_h への連続作用素である．$\tilde{K}$ を $C[L_2]$ から $L_2 \oplus L_2 \oplus C[L_2]$ への作用素

$$\tilde{K}u(x,t) = \left\{u(x,0), ih\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}, \left\{\left(ih\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\right)^2 - c^2\left(ih\nabla - \frac{e}{c}\mathscr{A}\right)^2 - m^2c^4\right\}u\right\}$$

とする．等式(3.7)より，前の定理と同様にして次の定理を得る．

定理 5.8 a　もし $y_1 \in R_h, y_2 \in R_h$ ならば $\tilde{K}^{-1}\{y_1, y_2, 0\} \in R_h$ である．

§4　特性多項式の各根に対応する成分への初期条件の分解

初期条件

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h}S_0(x)\right], \qquad u_t\Big|_{t=0} = \varphi_1(x)\exp\left[\frac{i}{h}S_0(x)\right]$$

を特性多項式の根に対応して分解することができることを示そう．

簡単のため2階の方程式について考察しよう：

$$\left\{\left(i\frac{\partial}{\partial t} - A\Phi(x,t)\right)^2 - c^2[-\nabla^2 + \gamma^2 A^2] + (\bar{B}(x,t), \mathrm{grad}) + AR(x,t)\right\}u(x,t) = 0. \tag{4.1}$$

結果は第1章(1.16)の一般の方程式に移行できるが，表現が複雑となる．(4.1)の特性多項式は

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \Phi(x,t)\right)^2 - c^2((\nabla S)^2 + \gamma^2) = 0. \tag{4.2}$$

この方程式の二つの解

$$\frac{\partial S^\pm}{\partial t} = -H^\pm(x, \nabla S^\pm, t) \tag{4.3}$$

$$H^\pm(x,p,t) = \Phi(x,t) \mp C\sqrt{p^2+\gamma^2} \tag{4.4}$$

には，次の陪特性方程式系

$$\frac{\partial x_i{}^\pm}{dt} = \frac{\partial H^\pm}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H^\pm}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.5}$$

が対応する．$\{X(x_0,t), P(x_0,t)\}$ を(4.5)の次の初期値に対する解とする：

$$X(x_0, 0) = x_0, \qquad P(x_0, 0) = \mathrm{grad}\, S_0(x_0).$$

方程式 $X(x_0,t) = x$ は x_0 について $x_0 = x_0(x,t)$ と一意的に解けるものとしよう．

$$S^{\pm}(x,t)=S_{\pm}(x_0,t)$$

とおく．

$$v^{\pm}(x,t)=u(x,t)\exp\{-iAS^{\pm}(x,t)\}. \tag{4.6}$$

$u=v^{\pm}\exp\{iAS^{\pm}(x,t)\}$ を方程式(4.2)に代入する．$v^{\pm}(x,t)$ に関する次の方程式を得る：

$$\begin{aligned}A\Big\{&2\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\frac{\partial v^{\pm}}{\partial t}+\Phi\frac{\partial v^{\pm}}{\partial t}-2c^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v^{\pm}}{\partial x_i}\frac{\partial S^{\pm}}{\partial x_i}+\frac{\partial(\Phi v^{\pm})}{\partial t}\\&-[(\bar{B}(x,t),\operatorname{grad}S^{\pm})+\square S^{\pm}-iR(x,t)]v^{\pm}\Big\}\\&=-i[\square v^{\pm}+(\bar{B}(x,t),\operatorname{grad}v^{\pm})]\end{aligned} \tag{4.7}$$

ここで $\square=c^2\nabla^2-\partial^2/\partial t^2$ である．方程式(4.7)において A が対角型掛け算作用素 ω として，

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\omega dE_{\omega}{}^{A}$$

と表現されているとして考えよう．解 $v^{\pm}(x,t,\omega)$ を ω^{-1} の冪の形式的級数で表現しよう：

$$v^{\pm}(x,t,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k{}^{\pm}(x,t)\omega^{-k}. \tag{4.8}$$

部分和

$$v_j{}^{\pm}=\sum_{\alpha=0}^{j}b_{\alpha}{}^{\pm}(x,t)\omega^{-\alpha}$$

の満たす方程式は

$$\begin{aligned}&2\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\frac{\partial v_j{}^{\pm}}{\partial t}+\Phi\frac{\partial v_j{}^{\pm}}{\partial t}-2c^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S^{\pm}}{\partial x_k}\frac{\partial v_j{}^{\pm}}{\partial x_k}+\frac{\partial(\Phi v_j{}^{\pm})}{\partial t}\\&\quad-[(\bar{B},\operatorname{grad}S^{\pm})+\square S^{\pm}-iR(x,t)]v_j{}^{\pm}\\&=-i[\square v_{j-1}{}^{\pm}+(\bar{B},\operatorname{grad}v_{j-1}{}^{\pm})].\end{aligned} \tag{4.9}$$

$t=0$ のとき $S^{\pm}(x,0)=S_0(x)$, $\Phi(x,0)=\Phi_0(x)$ とする．(4.9)において $j=0$, $v_{-1}=0$, $t=0$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_0{}^{\pm}}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\Big|_{t=0}+\Phi_0(x)\right)^{-1}\Big\{&2c^2(\nabla S_0,\nabla)+(\bar{B}(x,0),\nabla S_0)+\square S^{\pm}\Big|_{t=0}\\&-iR(x,0)-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big\}v_0{}^{\pm}(x,0)=B_1{}^{\pm}v_0{}^{\pm}(x,0)\end{aligned} \tag{4.10}$$

を得る．

さて $\varphi_0{}^{\pm}(x,\omega)$ を x につき C^∞ で ω^{-1} に関する解析函数とする．二つの初期条件(±)

$$u_N{}^{\pm}|_{t=0}=\varphi_0{}^{\pm}(x,\omega)\exp\{i\omega S_0(x)\} \tag{4.11}$$

$$\left.\frac{\partial u_N{}^{\pm}}{\partial t}\right|_{t=0}=\left\{i\omega\left.\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\right|_{t=0}\varphi_0{}^{\pm}(x,\omega)+\left.\frac{\partial v_N{}^{\pm}}{\partial t}\right|_{t=0}\right\}\exp\{i\omega S_0(x)\} \tag{4.12}$$

をそれぞれ正負の初期条件といおう．それらは特性多項式の二つの根に対応している．

補題 5.6　初期条件

$$u|_{t=0}=\psi(x,\omega)\exp\{i\omega S_0(x)\},\qquad u_t|_{t=0}=0 \tag{4.13}$$

$$u|_{t=0}=0,\qquad u_t|_{t=0}=\tilde{\psi}(x,\omega)\exp\{i\omega S_0(x)\} \tag{4.14}$$

は $O(\omega^{-(N+1)})$ の誤差でもって(4.11), (4.12)の解の正負の初期条件の和として表わすことができる：

$$u|_{t=0}=u_N{}^{+}|_{t=0}+u_N{}^{-}|_{t=0}+O(\omega^{-(N+1)}),\qquad u_t|_{t=0}=O(\omega^{-N}) \tag{4.15}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\left(\frac{\partial u_N{}^{+}}{\partial t}+\frac{\partial u_N{}^{-}}{\partial t}\right)\right|_{t=0}+O(\omega^{-N}),\qquad u|_{t=0}=O(\omega^{-(N+1)}). \tag{4.16}$$

ここで $\psi(x,\omega),\tilde{\psi}(x,\omega)$ は ω^{-1} について解析的であるとする．

証明　$\varphi^{\pm}(x,\omega)$ を(4.15)あるいは(4.16)を満たすように選ぶ．すなわち(4.15)の場合

$$\psi(x,\omega)=\varphi^{+}+\varphi^{-}+O(\omega^{-(N+1)})$$

$$i\omega\left(\left.\frac{\partial S^{+}}{\partial t}\right|_{t=0}\varphi^{+}+\left.\frac{\partial S^{-}}{\partial t}\right|_{t=0}\varphi^{-}\right)+\left.\frac{\partial v_N{}^{+}}{\partial t}\right|_{t=0}+\left.\frac{\partial v_N{}^{-}}{\partial t}\right|_{t=0}=O(\omega^{-N})$$

となる．ψ と $\varphi^{\pm}$ を ω^{-1} の冪に展開して係数を比較すると，まず

$$\varphi_0{}^{+}+\varphi_0{}^{-}=\psi_0$$

$$(\Phi_0+c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2})\varphi_0{}^{+}+(\Phi_0-c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2})\varphi_0{}^{-}=0$$

を得る．よって，

$$\varphi_0{}^{\pm}=\frac{\mp\Phi+c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}}{2c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}}\psi_0$$

が導かれる．さらに

$$\varphi_1{}^+ + \varphi_1{}^- = \psi_1$$

$$i\{\Phi_0 + c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}\}\varphi_1{}^+ + i\{\Phi_0 - c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}\}\varphi_1{}^- = B_1{}^+\varphi_0{}^+ + B_1{}^-\varphi_0{}^-$$

であるから

$$\varphi_1{}^\pm = \mp\frac{(\Phi_0 \mp c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2})\psi_1 + i(B_1{}^+\varphi_0{}^+ + B_1{}^-\varphi_0{}^-)}{2c\sqrt{(\nabla S_0)^2+\gamma^2}}$$

を得る．同様にして $\varphi_k{}^\pm(x,t)\ (k \leqq N)$ を求めることができる．この種の初期条件を異なった特性多項式の根に対応する項に分解することは，第1章の(1.16)の型の作用素係数の方程式に対しても行なえる．Ludwig[1]では双曲型方程式に対して同様のことを行なっている．

§5　補足：ある種の波動型方程式(系)に対する輸送方程式の解

次の補題は輸送方程式の解を調べるのに重要な道具である．

補題 A　方程式

$$\frac{dx_k}{d\tau} = F_k(x) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n+1)$$

は，積分曲線の族 $\{x_k(\tau, a_1, \cdots, a_n)\}_{k=1,2,\cdots,n}$ をもつものとする．そのとき

$$\frac{d}{d\tau}\log\frac{D(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})}{D(a_1, \cdots, a_n, \tau)} = \operatorname{div} F$$

が成り立つ．

この補題は Соболев の補題を少し変形すれば証明できる(Смирнов[1])．

さて，具体的な波動型方程式に話をもどそう．互いに異なる特性根をもつ弱結合双曲型方程式系

$$L\psi = \frac{\partial^m\psi}{\partial t^m} + \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_{n+1}\leqq m\\ k_{n+1}\neq m}} a_{k_1,\cdots,k_{n+1}}(x,t)\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}}}{\partial x_1{}^{k_1}\partial x_2{}^{k_2}\cdots\partial x_n{}^{k_n}\partial t^{k_{n+1}}}\psi = 0 \tag{5.1}$$

を考察しよう．ここで $\psi=(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N)$ は N 個の成分をもつベクトル，$a_{k_1,\cdots,k_{n+1}}(x,t)$ のうちで $k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}=m$ を満たすものは，単位行列のスカラー倍であるとする．

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) = \sum_{k_1+\cdots+k_{n+1}=m} a_{k_1,\cdots,k_{n+1}}\frac{\partial^m}{\partial x_1{}^{k_1}\cdots\partial t^{k_{n+1}}} + \frac{\partial^m}{\partial t^m},$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) = \sum_{k_1+\cdots+k_{n+1}=m-1} a_{k_1,\cdots,k_{n+1}} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial t^{k_{n+1}}}$$

とおく．$S(x,t)$ を (5.1) に対応する特性方程式の一つの解とする．$\phi=ue^{i\omega S}$ とおいて ω^{m-1} の係数を 0 とおく．得られた方程式を (5.1) に対する輸送方程式という．

輸送方程式は次の型をしている：

$$\frac{du}{d\tau}+\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}+B\right)u=0 \tag{5.2}$$

B が単位行列のスカラー倍のときは知られており，その一般化は容易である．ここで，τ はパラメーターであって $t|_{\tau=0}=0$ を満たし，また $x_{n+1}=t$ とする．x, p, t の代わりに，τ の函数である陪特性方程式系の解を代入せねばならない．

変換 $u=\exp\left\{-\int_0^\tau Bd\tau\right\}v$ を行なうと，輸送方程式は

$$\frac{dv}{d\tau}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}v=0$$

となる．ベクトル v の方向は陪特性曲線によって不変であるから，

$$v=v_0 e^{\varphi} J^{-1/2}$$

$v_0=\text{const}$，$J=D(t,x)/D(\tau,x_0)$ とおくことができる．

φ に関する方程式

$$\frac{d\varphi}{d\tau}-\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\ln J+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}=0$$

を得る．補題 A を用いよう．$\{x(\tau), t(\tau)\}$ に関する方程式

$$\frac{dx_i}{d\tau}=\frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n), \qquad \frac{dt}{d\tau}=\frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}}$$

に適用すると，

$$\frac{d}{d\tau}\ln J=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial p_i}\left(\nabla S, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t\right)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}}\left(\nabla S, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t\right)$$

を得る．これを輸送方程式に代入すると

$$\frac{d\varphi}{d\tau}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial x_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_{n+1}\partial t}=0$$

を得る．これを積分して

$$\varphi=\varphi_0+\frac{1}{2}\left\{\int_0^\tau\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial x_i}+\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_{n+1}\partial t}\right)d\tau\right\}$$

これを公式 $J=\dfrac{D(t,x)}{D(\tau,x_0)}=\dfrac{Dx}{Dx_0}\dfrac{dt}{d\tau}=\dfrac{Dx}{Dx_0}\dfrac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}}$ [1] に注意して t に関する積分に直すと，次の補題を得る.

補題 5.7　方程式(5.2)の解は

$$u(t)=\frac{u(0)\sqrt{Dx_0/Dx}}{\sqrt{\dfrac{\partial\Lambda(t)}{\partial p_{n+1}}}\Big/\sqrt{\dfrac{\partial\Lambda(0)}{\partial p_{n+1}}}}\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial p_{n+1}}\right)^{-1}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2\Lambda}{\partial p_i\partial x_i}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial p_{n+1}\partial t}-B\right]dt\right\} \tag{5.3}$$

と表現される.

例

1.　波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2(x,t)\Delta u=0$$

を考察しよう. Λ, B は

$$\Lambda(p,p_{n+1},x,t)=p_{n+1}{}^2-c^2(x,t)p^2,\qquad B\equiv 0$$

となる. 輸送方程式は

$$\frac{du}{d\tau}+\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}-c^2\Delta S\right)u=0$$

となる.

$$\frac{dt}{d\tau}=2p_{n+1},\qquad p_{n+1}{}^2-c^2p^2=0$$

であるから

$$\frac{dt}{d\tau}=\pm 2c|p|.$$

Λ に関する微分計算して(5.3)に代入すると，

$$u=\sqrt{\frac{c_0|p_0|}{c|p|}}u_0\sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}}\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{(\nabla c\cdot p)}{\pm|p|}\right]dt\right\}$$

を得る. $\dot{p}=\pm\nabla c|p|$ より

$$u=\frac{|\dot{p}_0|^{3/2}}{|p|^{3/2}}\sqrt{\frac{c_0}{c}}\sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}}u_0.$$

---

1)〔訳注〕 Dx/Dx_0 は x を (t,x_0) の函数とみなし，t を固定して x_0 に関する微分の Jacobi 行列式の意味である.

2. 量子力学における方程式を含む波動型の方程式

$$\left\{\left[i\frac{\partial}{\partial t}+A\Phi\right]^2+c^2(x,t)([\nabla-iA\mathscr{A}(x,t)]^2-A^2\gamma^2)\right.$$
$$\left.+\sum_k B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}+iAR(x,t)\right\}\psi(x,t)=0 \tag{5.4}$$

を考察しよう．

$S(x,t)$ を (5.4) の特性方程式の解とし

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{iS(x,t)A}(-iA^{-1})^k\psi_k(x,t)$$

が形式的に方程式 (5.4) を満たすとしよう．このとき ψ_0 の満たす方程式を輸送方程式ということにする．方程式 (5.4) において iA を $\partial/\partial y$ とおきかえる．y は (x,t) とは別の変数である．そのとき，弱結合双曲型方程式系

$$\left\{-\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right]^2+c^2\left[\left(\nabla-\frac{\partial}{\partial y}\mathscr{A}\right)^2+\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\right.$$
$$\left.+\sum_k B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial y}R\right\}\psi=0 \tag{5.4*}$$

を得る．(5.4)* に対する輸送方程式の解を用い，p_y を 1 とおきかえると次の結果を得る．

補題 5.8

$$\psi_0=\psi_0(0)\sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}\frac{c(x_0,0)}{c(x,t)}\sqrt{\frac{(p_0-\mathscr{A}(x_0,0)^2+\gamma^2}{(p_0-\mathscr{A}(x,t)^2+\gamma^2}}}$$
$$\times\exp\int_0^t\frac{-1}{2c\sqrt{(p-\mathscr{A})^2+\gamma^2}}\left[(p-\mathscr{A})\cdot\nabla c^2-\sum\frac{\partial\mathscr{A}_i}{\partial x_i}c^2+\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\sum B_kp_k-R\right]dt.$$

3. 次に弾性論における方程式を考察しよう．

$$\rho(x)\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}=(\lambda(x)+\mu(x))\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\mu(x)\Delta u_i+\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}(\operatorname{div}u)$$
$$+\sum_j\frac{\partial\mu}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{5.5}$$

(5.5) に対する特性方程式は次の二つに分けることができる：

$$\frac{\partial S_1{}^{\pm}}{\partial t}=\pm a|\nabla S_1{}^{\pm}|,\qquad a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial S_2{}^{\pm}}{\partial t}=\pm b|\nabla S_2{}^{\pm}|,\qquad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{5.7}$$

(5.5)の方程式に対する輸送方程式も前と同様に定めることができる．$S_1^{\pm}$ に対応する解を縦波，$S_2^{\pm}$ に対応する解を横波とよぶ．対応する特性方程式および陪特性方程式もまた Hamilton-Jacobi の方程式および Hamilton 系という．

縦波，横波の場合をそれぞれ別個に考察しよう．以下に述べる解は Кучеренко[1]による．

a)　**縦波**　φ をスカラー函数として，輸送方程式を $u=\varphi\nabla S$ とおく．輸送方程式は

$$\nabla S\cdot(M\varphi\nabla S)=0$$

$$Mu=\rho\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}u+2\rho\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}-(\lambda+\mu)[(\operatorname{div}u)\nabla S+\nabla(u\cdot\nabla S)]-\mu(u\Delta S+2\{\nabla u,\nabla S\})$$
$$-\nabla\lambda(u\cdot\nabla S)-\nabla S(u\cdot\nabla\mu)-u(\nabla\mu\cdot\nabla S)$$

となる．ここで $\{\nabla u,\nabla S\}=\sum_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j}$ とする．Hamilton-Jacobi の方程式より(以下において S^+ のみを考え，＋の符号は略す)

$$\nabla\frac{\partial S}{\partial t}=-(\nabla a)|\nabla S|-\frac{a}{2|\nabla S|}\nabla(\nabla S)^2$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=a^2\frac{\nabla(\nabla S)^2\cdot\nabla S}{2|\nabla S|}+a\nabla a\cdot\nabla S$$

を得る．$\varphi\nabla S$ を輸送方程式に代入し前述の恒等式および Hamilton-Jacobi の方程式を用いることにより，

$$-(\lambda+2\mu)[\varphi\Delta S|\nabla S|^2+2\nabla\varphi\cdot\nabla S|\nabla S|^2+\varphi\nabla S\cdot\nabla(\nabla S)^2]$$
$$-2\varphi(\nabla\mu\cdot\nabla S)|\nabla S|^2-(\nabla\lambda\cdot\nabla S)|\nabla S|^2\varphi+\frac{3}{2}a^2\rho\varphi\nabla S\cdot\nabla(\nabla S)^2$$
$$+\rho a(\nabla a\cdot\nabla S)|\nabla S|^2\varphi-2a\rho|\nabla S|^3\frac{\partial\varphi}{\partial t}+2(\nabla a\cdot\nabla S)a|\nabla S|^2\rho\varphi=0$$

を得る．前に述べた命題 A の簡単な場合，‘もし x が $dx/dt=X(t,x)$ を満たすならば，$(d/dt)\ln Dx/Dx_0=\operatorname{div}X$ である’を応用すると

$$\Delta S=\frac{|\nabla S|}{a}\left[\frac{d}{dt}\ln\frac{Dx}{Dx_0}-\frac{\nabla a\cdot\nabla S}{|\nabla S|}+\frac{a\nabla S\cdot\nabla(\nabla S)^2}{2|\nabla S|^3}\right]$$

を得る．ΔS の表現，および Hamilton 系から示される等式

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+a\frac{\nabla f\cdot\nabla S}{|\nabla S|},$$

ρ, λ, μ が時刻に依存しないことより，輸送方程式は

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\sqrt{\frac{Dx}{Dx_0}}\frac{1}{a^2}\sqrt{\lambda+2\mu}\,\varphi\right)=0$$

となる．よって

$$\varphi=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\frac{\varphi_0}{\sqrt{\frac{Dx}{Dx_0}}}\frac{a}{a_0}$$

を得る．S^- に対応する波についても同様である．得られた結果を補題としてまとめると，次のようになる．

補題 5.9　ベクトル函数

$$u=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\frac{\varphi_0}{\sqrt{\frac{Dx}{Dx_0}}}\frac{a}{a_0}\nabla S$$

は縦波に対応する弾性方程式に対する輸送方程式を満たす．

b)　**横波**　$u=nv_n+\nu v_\nu$ とおく．v_n, v_ν はスカラー函数で，n, ν は連続なベクトル場で条件

$$n\cdot\nu=n\cdot\nabla S=\nu\cdot\nabla S=0 \qquad n^2=\nu^2=1$$

を満たす．輸送方程式は

$$n\cdot M(v_n\cdot n+v_\nu\cdot\nu)=0$$
$$\nu\cdot M(v_n\cdot n+v_\nu\cdot\nu)=0$$

である．縦波のときと同じ等式を用いて変形すると

$$\frac{dv_n}{dt}+v_n\frac{d}{dt}\ln\sqrt{\rho\frac{Dx}{Dx_0}}+v_\nu\frac{d\nu}{dt}\cdot n=0$$
$$\frac{dv_\nu}{dt}+v_\nu\frac{d}{dt}\ln\sqrt{\rho\frac{Dx}{Dx_0}}+v_n\frac{dn}{dt}\cdot\nu=0$$

となる．$n\cdot\nu=0$ であるから

$$\frac{dn}{dt}\cdot\nu=-n\cdot\frac{d\nu}{dt}$$

を得る．これを T とおく．

また，$z=v_n+iv_\nu$ とおくと

$$z=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}z_0\sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}}\exp\left\{-i\int_0^t T\,dt\right\}$$

を得る．以上の結果をまとめて次の補題になる．

補題 5.10　函数

$$u = n\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\frac{Dx_0}{Dx}\frac{v_{n_0}}{\cos\gamma}}\cos\left[-\int_0^t \nu\frac{dn}{dt}dt+\gamma\right]$$
$$+\nu\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\frac{Dx_0}{Dx}\frac{v_{n_0}}{\cos\gamma}}\sin\left[-\int_0^t \nu\frac{dn}{dt}dt+\gamma\right]$$

は，弾性論における横波に対応する輸送方程式を満たす．ここで γ は適当な定数で，$\cos\gamma=0$ のときは

$$u = \nu\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\frac{Dx_0}{Dx}}v_{\nu_0}\cos\left[\int_0^t \nu\frac{dn}{dt}dt\right]+n\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}\frac{Dx_0}{Dx}}v_{\nu_0}\sin\left[\int_0^t \nu\frac{dn}{dt}dt\right]$$

である．

第6章　作用素係数偏微分方程式の解の局所的漸近形

この章では，$x=(x_1, \cdots, x_n)$ および x に関する偏微分に依存する作用素を係数とする，時間に関して m 階の方程式の解の漸近形を研究する．この章の結果は，双曲型方程式の解の漸近形を構成する際に，本質的な役割を演ずるであろう．

最初の2節は補助的な性格をもっている．それらは次の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{iAf(x)}g(x)dx, \qquad x=x_1, \cdots, x_n$$

の漸近展開に捧げられている．ここで，$g(x)$ は Banach 空間値函数，$f(x)$ は実数値函数，そして A は B における作用素群の生成作用素である．問題は，この積分を $D(A^N)$ を法として計算することにある．第3節では，第2節で得られた公式と第2部補題5.5をもとにして，作用素係数偏微分方程式の解の局所的漸近形が構成される．その際，その方程式の解の存在，一意性，可微分性が仮定される．

§1　Banach 空間における作用素の平方根について

次の条件1), 2), 3)を満たす Banach 空間 B で定義された非有界作用素 A を考察しよう．

1)　作用素 A は，パラメーターに関し強連続な群 e^{iAt} を生成し，

$$\|e^{iAt}\| \leqq M, \qquad (-\infty < t < \infty)$$

を満たす．

2)　任意の $\gamma>0$ に対して，$(1+\gamma^2 A)^{-1}$ が存在して B 全体で定義されたノルム1以下の有界作用素となる．

3)　A^{-1} が存在する．

以下に述べる補題の主張は，A が条件1), 3)および，条件

2a)　$(1-\gamma^2 A)^{-1}$ が存在してノルムが1以下である．

を満たす場合にも成り立つ．

条件 1) から, Hille–Phillips–Yosida の定理によって(第1部第4章§1を参照せよ),

$$\|(1-i\alpha A)^{-1}\| \leqq M, \qquad (-\infty<\alpha<\infty)$$

が得られる. さらに,

$$\|(1-i\alpha A+\gamma^2 A)^{-1}\| \leqq \|(1+\gamma^2 A)^{-1}\|\cdot\|[1-i\alpha A(1+\gamma^2 A)^{-1}]^{-1}\| \leqq M \quad (1.1)$$

が成り立つ. 実際, 第1部第4章§2, (2.8) により,

$$\|e^{iB_\gamma t}\| \leqq M, \qquad B_\gamma = \frac{A}{1+\gamma^2 A}$$

が成り立つから, Hille–Phillips–Yosida の定理により,

$$\|(1-i\alpha B_\gamma)^{-1}\| \leqq M$$

が示される.

われわれは, 部分積分に関する次の初等的な公式を用いる.

$$\int_0^1 e^{iAf(t)}\left(\frac{g(t)}{f'(t)}\right)' dt = -e^{iAf(0)}\frac{g(0)}{f'(0)} - iA\int_0^1 e^{iAf(t)}\frac{g(t)}{f'(t)}df(t). \quad (1.2)$$

ここで, $g(t)$ は B-値可微分函数で $t=1$ で 0 になるものである. この公式は左辺の積分が存在するならば成り立つことを注意しておこう.

補題 6.1　作用素

$$T = \frac{2e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} A\int_0^\infty \exp(iAx^2)dx$$

は B での作用素として $D(A)$ で存在する.

証明　$g\in D(A)$ とせよ. われわれは,

$$f = \int_0^\infty \exp(iAx^2)Agdx \in B \quad (1.3)$$

を証明する[1]. まず (1.3) の積分区間を二つに分ける.

---

1)　条件 1) から A は稠密な定義域をもつ閉作用素であることが得られるから, 等式

$$\lim_{N\to\infty} A\left\{\int_0^N \exp(iAx^2)gdx\right\} = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \exp(iAx^2)Agdx$$

から,

$$A\int_0^\infty \exp(iAx^2)gdx = \int_0^\infty \exp(iAx^2)Agdx$$

が成り立つ.

$$f=\int_0^1+\int_1^\infty \equiv f_1+f_2.$$

明らかに,

$$f_1=\int_0^1 \exp(iAx^2)Agdx \in B, \qquad \|f_1\| \leqq M\|Ag\|. \tag{1.4}$$

変数変換 $x^2=t$ により

$$f_2=\int_1^\infty \exp(iAx^2)Agdx=\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{e^{iAt}Ag}{\sqrt{t}}dt.$$

ここで部分積分の公式(1.2)を用いて,

$$f_2=\frac{i}{2}e^{iA}g-\frac{i}{4}\int_1^\infty \frac{e^{iAt}g}{t^{3/2}}dt \tag{1.5}$$

を得る[1]. (1.5)の第1項は明らかに $\frac{1}{2}M\|g\|$ で評価され, 第2項については,

$$\frac{1}{4}\left\|\int_1^\infty \frac{e^{iAt}g}{t^{3/2}}dt\right\| \leqq \frac{1}{4}\int_1^\infty \left\|\frac{e^{iAt}g}{t^{3/2}}\right\|dt \leqq \frac{M\|g\|}{4}\int_1^\infty \frac{dt}{t^{3/2}}=M_1\|g\|$$

という評価が成り立つ. ゆえに,

$$\|f\| \leqq C_1\|Ag\|+C_2\|g\| \tag{1.6}$$

が成り立つ. (証明終り.)

作用素 P_α を次式で定義する.

$$P_\alpha g=\frac{2}{\sqrt{\pi i}}\int_0^\infty \exp(iA\xi^2)\exp(-\alpha\xi^2)gd\xi. \tag{1.7}$$

ここで, $g \in B$, α は正の実数.

明らかに, この作用素は B 全体で定義された有界作用素である. 実際次の評価が成り立つ.

$$\left\|\int_0^\infty \exp(iA\xi^2)\exp(-\alpha\xi^2)gd\xi\right\| \leqq \int_0^\infty \|\exp(iA\xi^2-\alpha\xi^2)g\|d\xi$$

$$\leqq M\|g\|\int_0^\infty \exp(-\alpha\xi^2)d\xi=M_1\|g\|.$$

補題 6.2 次の等式

$$p_\alpha{}^2 g=(A+i\alpha)^{-1}g, \qquad (g \in B, \alpha>0)$$

が成り立つ.

---

1) この公式は, 積分の上端を ∞ にもって行くことによって得られる.

証明

$$P_\alpha{}^2 g = \frac{4}{\pi i}\int_0^\infty \exp(iA\xi^2-\alpha\xi^2)d\xi\int_0^\infty \exp(iA\eta^2-\alpha\eta^2)gd\eta$$
$$= \frac{4}{\pi i}\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty \exp(iAr^2-\alpha r^2)grdrd\varphi$$
$$= -i\int_0^\infty e^{i(A+\alpha i)t}gdt$$
$$= (A+\alpha i)^{-1}g. \qquad \text{(Dunford-Schwartz[1]参照.)}$$

補題 6.3 次の等式

$$T^2g = Ag, \qquad (g\in D(A))$$

が成り立つ.

証明 $T_\alpha = AP_\alpha, D(T_\alpha)=D(A)$ とおく．まず第1に，任意の $g\in D(A)$ に対して

$$T_\alpha g = \frac{2}{\sqrt{\pi i}}\int_0^\infty \exp(iAx^2-\alpha x^2)Agdx \to Tg, \qquad (\alpha\to 0) \qquad (1.8)$$

が成り立つことを示そう.

次式が成り立つ.

$$\frac{2}{\sqrt{\pi i}}\int_0^\infty \exp(iAx^2)\exp(-\alpha x^2)Agdx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi i}}\int_0^{\sqrt{N}} \exp(iAx^2)\exp(-\alpha x^2)Agdx + \frac{1}{\sqrt{\pi i}}\int_N^\infty \frac{e^{iAt}e^{-\alpha t}Ag}{\sqrt{t}}dt$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi i}}\int_0^{\sqrt{N}} \exp(iAx^2)\exp(-\alpha x^2)Agdx + \sqrt{\frac{i}{\pi}}\cdot\frac{e^{-N\alpha}e^{iAN}g}{\sqrt{N}}$$
$$-\sqrt{\frac{i}{4\pi}}\int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t^3}}e^{iAt}gdt - \alpha\sqrt{\frac{i}{\pi}}\int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}e^{iAt}gdt. \qquad (1.9)$$

右辺の第1項は，$\alpha\to 0, N\to\infty$ で Tg に収束するのは明らかだから，残余項が零に収束することを示せばよろしい：

1) $\left\|\dfrac{e^{-N\alpha}e^{iAN}g}{\sqrt{N}}\right\| \leqq \dfrac{M\|g\|}{\sqrt{N}}.$

2) $\left\|\displaystyle\int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{t^{3/2}}e^{iAt}gdt\right\| \leqq \displaystyle\int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{t^{3/2}}\|e^{iAt}g\|dt \leqq M\|g\|/\sqrt{N}.$

3)　$\alpha\left\|\int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}e^{iAt}g}{\sqrt{t}}dt\right\| \leqq \alpha M\|g\|\left|\int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}dt\right|$

$$\leqq 2\alpha M\|g\|\int_0^\infty \exp(-\alpha x^2)dx = \sqrt{\alpha\pi}\,M\|g\|.$$

ゆえに，(1.8)が示された．次に，

$$\lim_{\alpha\to 0} T_\alpha{}^2 g = T^2 g, \qquad (g \in D(A^2)) \tag{1.10}$$

を示そう．実際

$$T_\alpha{}^2 g = T_\alpha(T_\alpha - T)g + T_\alpha Tg \tag{1.10 a}$$

と分解すれば，仮定より $Tg \in D(A)$ ゆえ，

$$T_\alpha Tg \to T^2 g, \qquad (\alpha \to 0)$$

であるから，$T_\alpha(T_\alpha - T)g \to 0$ を示せばよい．ところが，(1.6)と同様にして，

$$\|T_\alpha g_1\| \leqq C_1\|Ag_1\| + C_2\|g_1\|, \qquad (g_1 \in D(A))$$

が成り立つから，

$$\|T_\alpha(T_\alpha - T)g\| \leqq C_1\|A(T_\alpha - T)g\| + C_2\|(T_\alpha - T)g\| \to 0,$$
$$(\alpha \to 0) \tag{1.10 b}$$

が得られる．(1.10 a)-(1.10 b) より (1.10) が従う．

一方，

$$T_\alpha{}^2 g = \frac{4}{\pi i}\int_0^\infty \exp(iA\xi^2)\exp(-\alpha\xi^2)d\xi \int_0^\infty \exp(iA\eta^2 - \alpha\eta^2)d\eta A^2 g$$
$$= -i\int_0^\infty e^{iAt-\alpha t}dtA^2 g = \frac{A^2}{A+i\alpha}g$$
$$= \left(A - i\alpha - \frac{\alpha^2}{A+i\alpha}\right)g.$$

したがって，$\|(A+i\alpha)^{-1}\| \leqq M/\alpha$ より，任意の $g \in D(A^2)$ に対して

$$T_\alpha{}^2 g \to Ag, \qquad (\alpha \to 0)$$

が示される．ゆえに，

$$T^2 g = Ag, \qquad (g \in D(A^2)).$$

$D(A^2)$ は $D(A)$ でノルム $\|g\| + \|Ag\|$ に関して稠密ゆえ，この等式の閉包をとることにより求める結果が得られる．　　　　(証明終り.)

$\overline{P_\alpha}$ で P_α の共役作用素

$$\overline{P_\alpha} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{i\pi/4}\int_0^\infty \exp(-iA\xi^2)\exp(-\alpha\xi^2)d\xi$$

を表わす.

補題 6.4 任意の $g\in B, \alpha>0$ に対して，次の等式が成り立つ.

$$P_\alpha \overline{P_\alpha} g = \frac{1}{A+i\alpha}\left\{\sum_{\alpha=0}^{N} \frac{c_k \alpha^k}{(A+i\alpha)^k} g + \alpha^N g_N\right\}.$$

ここで，c_k は適当な定数，$g_N\in D(A^N)$.

証明 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
P_\alpha \overline{P_\alpha} g = \overline{P_\alpha} P_\alpha g &= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \exp(-iA\xi^2-\alpha\xi^2)d\xi \int_0^\infty \exp(iA\eta^2-\alpha\eta^2) g d\eta \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty \exp(iA\tau^2-\alpha\tau^2)\exp(-2iA\tau^2\cos^2\varphi) g\tau d\tau \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty e^{iAt-\alpha t}\exp(-2iAt\cos^2\varphi) g dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\alpha - iA(1-2\cos^2\varphi)} g \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\alpha+iA\cos 2\varphi} g = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\alpha+iA\cos\varphi} g \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{C_\delta} \frac{dz}{\alpha+iA\cos z} g.
\end{aligned} \tag{1.10 c}$$

ここで，積分路 C_δ は次の点からなる.

$$z = \begin{cases} x, & 0\leqq x\leqq \pi/2-\delta \\ \pi/2+\delta e^{i\varphi}, & 0\leqq\varphi\leqq\pi \\ x, & \pi/2+\delta\leqq x\leqq\pi. \end{cases}$$

半円の上では,

$$\begin{aligned}
i\cos z &= i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta e^{i\varphi}\right) \\
&= i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\cos\varphi\right)\cosh(\delta\sin\varphi) \\
&\quad +\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\cos\varphi\right)\sinh(\delta\sin\varphi)
\end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{Re}\{i\cos z\}\geqq 0$ $(\delta\leqq\delta_0, 0\leqq\varphi\leqq\pi)$. したがって (1.1) によって

$$\|(\alpha+i\cos zA)^{-1}\| \leqq \frac{M}{\alpha}, \qquad (z\in C_\delta)$$

が成り立つことを注意しておこう. さて，(1.10 c) より

$$P_\alpha\overline{P_\alpha}g=\frac{1}{\pi(iA-\alpha)}\int_{C_\delta}\frac{dz}{\cos z\left[1+\dfrac{\alpha(1+\cos z)}{(iA-\alpha)\cos z}\right]}g$$

$$=\frac{1}{\pi(iA-\alpha)}\left\{\sum_{k=0}^{N}\int_{C_\delta}\frac{\alpha^k}{\cos z}\left[\frac{1+\cos z}{(\alpha-iA)\cos z}\right]^k g\,dz\right.$$

$$\left.+\int_{C_\delta}\frac{\alpha^{N+1}}{\cos z+\dfrac{\alpha(1+\cos z)}{iA-\alpha}}\left[\frac{1+\cos z}{(\alpha-iA)\cos z}\right]^{N+1}g\,dz\right\}$$

を得る．積分，

$$\frac{(-i)^k}{\pi}\int_{C_\delta}\frac{1}{\cos z}\frac{(1+\cos z)^k}{(\cos z)^k}dz$$

が存在して，定数 c_k に等しいから，

$$\frac{1}{\pi}\int_{C_\delta}\frac{dz}{\cos z+\dfrac{\alpha(1+\cos z)}{iA-\alpha}}g$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k\alpha^k}{(i\alpha+A)^k}g-\frac{\alpha^{N+1}}{(\alpha-iA)^N}\int_{C_\delta}\frac{(1+\cos z)^{N+1}dz}{(iA\cos z+\alpha)(\cos z)^{N+1}}g$$

と書ける．今，

$$\frac{\alpha}{(\alpha-iA)^N}\int_{C_\delta}\frac{(1+\cos z)^{N+1}dz}{(iA\cos z+\alpha)(\cos z)^{N+1}}g\in D(A^N)$$

を示そう．

$$\left\|\frac{A^N\alpha}{(\alpha-iA)^N}\int_{C_\delta}\frac{(1+\cos z)^{N+1}dz}{(iA\cos z+\alpha)(\cos z)^{N+1}}g\right\|$$

$$\leqq\alpha\left\|\left[i\left(1-\frac{\alpha}{\alpha-iA}\right)\right]^N\right\|\max_{C_\delta}\left|\frac{(1+\cos z)^{N+1}}{(\cos z)^{N+1}}\right|\int_{C_\delta}\|(iA\cos z+\alpha)^{-1}g\|dz$$

$$\leqq M(1+M)^N\|g\|C(N,\delta).$$

（証明終り．）

注意　A が条件 2 a) を満たす場合は，道を $-\pi\leqq\varphi\leqq 0$ にとらねばならない．

補題 6.5　任意の $g\in D(A)$ に対して

$$T\overline{T}g=Ag \tag{1.11}$$

が成り立つ．

証明　補題 6.3 の証明と同様にして

$$T\overline{T}g=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \exp(iAx^2)Adx\int_0^\infty \exp(-iAy^2)Agdy$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^\infty \exp(iAx^2-\alpha x^2)Adx\int_0^\infty \exp(-iAy^2-\alpha y^2)Agdy \tag{1.12}$$

が成り立つ．補題 6.3 および，6.4 で行なわれたと同様にして，

1) $\displaystyle \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \exp(iAx^2-\alpha x^2)dx\int_0^\infty \exp(-iAy^2-\alpha y^2)A^2gdy$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{C_\delta}\frac{dz}{\alpha+iA\cos z}A^2g$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{C_\delta}\left\{\frac{A}{i\cos z}+\frac{\alpha}{\cos^2 z}-\frac{\alpha}{\cos^2 z\left(1+\dfrac{iA}{\alpha}\cos z\right)}\right\}gdz,$$

2) $\displaystyle \left\|\left(1+\frac{iA\cos z}{\alpha}\right)^{-1}\right\|\leqq M$

を得る．ところが

$$\frac{1}{i}\int_{C_\delta}\frac{dz}{\cos z}=\pi,\qquad \left\|\int_{C_\delta}\frac{dz}{\cos^2 z}g\right\|\leqq C_1(\delta)\|g\|,$$
$$\left\|\int_{C_\delta}\frac{dz}{\cos^2 z\left(1+\dfrac{iA\cos z}{\alpha}\right)}g\right\|\leqq C_2(\delta)M\|g\|$$

であるから，

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \exp(iAx^2-\alpha x^2)dx\int_0^\infty \exp(-iAy^2-\alpha y^2)A^2gdy=Ag.$$

したがって，(1.12) より等式 (1.11) が任意の $g\in D(A^2)$ に対して成り立つことがわかる．次に，ノルム $\|g\|+\|Ag\|$ に関して閉包をとれば，任意の $g\in D(A)$ に対して等式 (1.11) が成り立つことがいえる．　（証明終り．）

補題 6.6　$\overline{T}=T$ が成り立つ．

証明　任意の $g\in D(A^2)$ に対して，補題 6.3，6.5 より，

$$T\overline{T}g=Ag=T^2g$$

が成り立つ．したがって，

$$T^2\overline{T}g=T^3g.$$

すなわち，

$$A\bar{T}g - ATg = 0.$$

条件3)より，

$$\bar{T}g = Tg, \qquad (g \in D(A^2)).$$

$\|g\| + \|Ag\|$ に関して閉包をとることにより，

$$\bar{T}g = Tg, \qquad (g \in D(A)).$$

(証明終り.)

このことから，A が実 Banach 空間で定義されている場合にも，T は B における作用素として定義されることがわかる.

ここで構成した作用素 T および P_α を

$$T = \sqrt{A}, \qquad P_\alpha = (A + i\alpha)^{-1/2}$$

と表わそう．このような表記は補題の証明から正当であると認められる.

A が‘負’，すなわち条件2a)が成り立っている場合は，$\sqrt{|A|}$ でもって $\sqrt{-A}$ を表わすことにしよう.

§2 抽象的函数に対する停留位相の方法

この節では，抽象的函数の積分に停留位相の方法を適用して，漸近公式を導く．直線に値をとる函数に対しての停留位相の方法は，たとえば，Федорюк [2]，Erdélyi[1]によって確立されている.

われわれは，手始めによく知られた形式的方法によって，停留位相の方法による漸近公式を導く．その際以下に見るように発散積分が現われるが，それをわれわれは全く形式的に正則化して扱うのである．しかし，われわれがここで行なう停留位相の方法の基礎づけは，いかなる意味でも，その形式的方法には依っていないことを注意しておこう.

1° 漸近展開の各項を形式的に計算する方法

次の積分を研究してみよう:

$$I(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{h} f(x)\right\} \varphi(x) dx_1 \cdots dx_n. \tag{2.1}$$

ここで，$\varphi(x) \in C_0^\infty$, $f(x) \in C^\infty$．$I(h)$ の $h \to 0$ での漸近展開の各項を計算するのに，次の形式的方法を適用しよう.

$x = x_0$ が唯一の停留点，すなわち，そこで grad $f(x) = 0$ となる点であるとす

る．$x=x_0$ の近傍で $f(x)$ および $\varphi(x)$ を Taylor 展開する．

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_j}(x_0)(x_i-x_{0i})(x_j-x_{0j})+\cdots,$$

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x_j}(x_j-x_{0j})+\cdots.$$

積分(2.1)で，$x_j-x_{0j}=\sqrt{h}\,\xi_j$ なる変数変換を行なうと次式を得る．

$$\begin{aligned}I(h)=\exp\left\{\frac{i}{h}f(x_0)\right\}h^{n/2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}}\int e^{-\varepsilon|\xi|^2}\exp\left(\frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n}f_{kj}(x_0)\xi_k\xi_j\right)\\ \times\exp\{i\sqrt{h}[f_3(x_0,\xi)+\sqrt{h}\,f_4(x_0,\xi)+\cdots]\}\\ \times(\varphi(x_0)+\varphi_1(x_0,\xi)\sqrt{h}+\cdots)d\xi.\end{aligned}\qquad(2.2)$$

ここで，

$$f_k(x_0,\xi)=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots x_{i_k}}(x_0)\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k},$$

$$f_{ik}(x_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}(x_0),$$

$$\varphi_k(x_0,\xi)=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x_0)\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\psi(x_0,\xi)&\equiv\exp\{i\sqrt{h}(f_3(x_0,\xi)+\sqrt{h}\,f_4(x_0,\xi)+\cdots)\}\\&\quad\times(\varphi(x_0)+\varphi_1(x_0,\xi)\sqrt{h}+\cdots)\\&=\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu/2}Q_\nu(x_0,\xi)\end{aligned}\qquad(2.3)$$

ここで，$Q_\nu(x_0,\xi)$ は $\xi_k(k=1,\cdots,n)$ に関して ν 次の多項式で，その係数は $x=x_0$ における $\varphi(x)$ の ν 次までの微係数の線型結合である．(2.3)を(2.2)に代入して，

$$I(h)=\exp\left\{\frac{i}{h}f(x_0)\right\}h^{n/2}\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu/2}C_\nu(x_0)\qquad(2.4)$$

を得る．ここで

$$C_\nu(x_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}}\int e^{-\varepsilon|\xi|^2}\exp\left(\frac{i}{2}\sum_{k,j=1}^{n}f_{kj}(x_0)\xi_j\xi_k\right)Q_\nu(x_0,\xi)d\xi.$$

奇数 ν に対しては，$Q_\nu(x_0,\xi)$ は奇函数ゆえ $C_\nu(x_0)=0$ となる．したがって，

$$I(h)=\exp\left\{\frac{i}{h}f(x_0)\right\}h^{n/2}\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu}C_{2\nu}(x_0)$$

が成り立つ．ここで $C_{2\nu}(x_0)$ は $x=x_0$ における $\varphi(x)$ の 2ν 次までの微係数の線型結合である．われわれは，基本的には部分積分のみに基づいて，この展開の基礎づけを行なう[1]．前節において既に見たように，Banach 空間 B に値をもつ抽象的函数，および B において群を生成する作用素 A に対するこの公式は次の形をもつ．

$$\int_a^b e^{iAf(x)}\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)'dx = -e^{iAf(a)}\frac{g(a)}{f'(a)} -iA\int_a^b e^{iAf(x)}\frac{g(x)}{f'(x)}df(x). \tag{2.5}$$

ここで，$g(b)=0, g(a)/f'(a)\in B$，かつ左辺の積分は収束するものとする．この公式によって，われわれはよく知られた停留位相の方法を抽象的函数の場合に拡張するのである．

事情を簡単に説明するために次の補題を述べよう．

補題 6.1 $\varphi(x)\in C_0^\infty$，$f(x)\in C^\infty$ とする．もし $\varphi(x)$ の台の上で $\mathrm{grad}\, f(x)\neq 0$ ならば，

$$I(h)=\int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}}\int \exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\}\varphi(x)dx = O(h^N)$$

が成り立つ．ここで N は任意の数である．

証明 明らかに，

$$I(h)=\frac{h}{i}\int\frac{1}{\partial f/\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\}\right)\varphi(x)dx \tag{2.6}$$

ゆえ，部分積分をすることにより，

$$I(h)=O(h)$$

を得る．これを N 回繰り返せば求める結果を得る．

抽象的函数に対しては，この補題は次の形に定式化される．

補題 6.8 $\varphi(x)\in C_0^\infty(B), f(x)\in C^\infty$ とする．iA は群を生成すると仮定する．もし $\varphi(x)$ の台の上で $\mathrm{grad}\, f(x)\neq 0$ ならば，

$$\int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}}\int e^{iAf(x)}\varphi(x)dx\in D(A^N)$$

が成り立つ．ここで N は任意の自然数である．

1) ここに述べた展開の方法を直接に正当化することや，$\varphi(x)$ の台の外で積分領域を(2.4)における積分が収束するように複素領域にとって積分を正則化することは，容易である．

証明は公式(2.5)を用いて補題6.7と同様に行なえばよい.

2°　1次元の場合，漸近級数への展開

この小節では次の積分を研究する.

$$\int_a^b e^{iAf(t)}g(t)dt. \tag{2.7}$$

ここで，$f(t)\in C^\infty$, $g(t)\in C^\infty[B]$，すなわち $g(t)$ はBanach空間 B に値をとる無限回微分可能函数，A は前節で述べた条件 1)–3) を満たす非有界作用素である.

特に A が掛算作用素 $1/h(0\leqq h\leqq 1)$ の場合，$g(t)$ が h に依存しているが $g(t)=g(t,h)$ の t に関する任意の導函数が $0\leqq h\leqq 1$ で有界ならば同様に扱える．この場合，われわれが展開する理論は，たとえばErdélyi[1]に述べられている普通の停留位相の方法と完全に一致する．われわれは，前小節で述べた部分積分の公式(2.5)に基づいて，次の補題を証明する.

補題6.9　$f(t)\in C^\infty$ は，条件：$f'(a)=0$, $f''(a)>0$, $f'(t)\neq 0$ $(t\in(a,b))$ を満たし，$g(t)\in C^\infty[B]$ は $t=b$ における任意の微係数が消える，と仮定する．このとき，奇数 m および $\alpha\geqq 0$ に対して次の公式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&(A+i\alpha)^{(m+1)/2}\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)dt\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{i(m+1)\pi/4}e^{iAf(a)}g(\alpha)\\
&\quad+(A+i\alpha)^{-1/2}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_1(a)+(A+i\alpha)^{-1}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_2(a)\\
&\quad+(A+i\alpha)^{-1}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\psi_1(\xi)d\xi+\chi_1(a).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

ここで，$\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$ および $\chi_1(a)\in D(A^\infty)$ は a に関して無限回微分可能な B 値函数，$\psi_1(\xi)\in C^\infty[B]$ はその任意の導函数が b_1 において消える B 値函数.

偶数の m および $\alpha\geqq 0$ に対しては，次の公式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&(A+i\alpha)^{(m+1)/2}\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)dt\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{i(m+1)\pi/4}e^{iAf(a)}g(a)\\
&\quad+(A+i\alpha)^{-1/2}e^{iAf(a)}\varphi_3(a)\\
&\quad+(A+i\alpha)^{-1/2}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\psi_2(\xi)d\xi+\chi_2(a).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで，$\varphi_3(a)$ および $\chi_2(a)\in D(A^\infty)$ は a に関して無限回微分可能な B 値函数，$\psi_2(\xi)\in C^\infty[B]$ はその任意の導函数が b_1 において消える B 値函数.

証明　等式

$$\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{g_1(t)(t-a)^m}{f'(t)}df(t)$$
$$=i(A+i\alpha)^{-1}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\left(\frac{(t-a)^m g_1(t)}{f'(t)}\right)'dt,\qquad (m>1)$$

を用いて次式を得る.

$$\begin{aligned}I_m&=\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)dt\\&=\int_a^b e^{i(A+\alpha i)f(t)}(t-a)^m e^{\alpha f(t)}g(t)dt\\&=\int_a^b e^{i(A+\alpha i)f(t)}(t-a)^m g_1(t)dt\\&=i^{[m/2]}(A+i\alpha)^{-[m/2]}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\left[\frac{d}{dt}\circ\frac{1}{f'(t)}\right]^{[m/2]}g_2(t)dt.\end{aligned}\tag{2.10}$$

ここで，

$$g_2(t)=(t-a)^m e^{\alpha f(t)}g(t).$$
$$f_1(t)=\left(\frac{d}{dt}\circ\frac{1}{f'(t)}\right)^{[m/2]}(t-a)^m g(t)e^{\alpha f(t)}$$

とおく．このとき，m が偶数ならば $f_1(a)\neq 0$ であるし，m が奇数のときは $f_1(a)=0$，$f_1'(a)\neq 0$ である.

m が奇数の場合　積分(2.10)をもう1回部分積分して，

$$\begin{aligned}I(m)=&\left(\frac{i}{f''(a)}\right)^{(m+1)/2}(m-1)!!(A+i\alpha)^{-(m+1)/2}e^{iAf(\alpha)}g(a)\\&+i^{(m+1)/2}(A+i\alpha)^{-(m+1)/2}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f'(t)}f_1(t)\right]dt\end{aligned}\tag{2.11}$$

を得る．ここで，

$$i\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}f_1(t)dt=(A+i\alpha)^{-1}\left\{e^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{f_1(t)}{f'(t)}\Big|_a^b\right.$$
$$\left.-\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f'(t)}f_1(t)\right]dt\right\}$$

を用いた．等式(2.11)は，

$$\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{i(m+1)\pi/4}(A+\alpha i)^{-(m+1)/2}e^{iAf(a)}g(a)$$

$$+i^{(m+1)/2}(A+i\alpha)^{-(m+1)/2}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f'(t)}f_1(t)\right]dt \qquad (2.12)$$

と書き直せるから，問題は次の積分の研究に帰着される．

$$I_0=\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)dt.$$

ここで，$\varphi(t)\in C^\infty[B]$，$\varphi(a)\neq 0$，$\varphi^{(k)}(b)=0$ $(k=1,2,\cdots)$.

変数変換$(\xi-a)^2=f(t)-f(a)$により，

$$I_0=\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)dt$$

$$=e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi(t(\xi))\frac{dt}{d\xi}d\xi$$

$$=e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi_1(\xi)d\xi$$

を得る．函数$e(\xi)\in C^\infty$

$$e(\xi)=\begin{cases}0, & \xi-a>\dfrac{b_1-a}{2}\\ 1, & \xi-a\leqq\dfrac{b_1-a}{4}\end{cases}$$

を用いて，I_0を以下のように分解する．

$$I_0=e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}e(\xi)\varphi(a)d\xi$$

$$+e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}e(\xi)(\varphi_1(\xi)-\varphi(a))d\xi$$

$$+e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}[1-e(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi.$$

第1項に関しては，$e(\xi)$の性質より次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\int_a^{b_1} \exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi(a)e(\xi)d\xi \\
&= \int_a^{\infty} \exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi(a)e(\xi)d\xi \\
&= \int_a^{\infty} \exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi(a)d\xi + \int_a^{\infty} [e(\xi)-1]\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi(a)d\xi \\
&= \int_0^{\infty} \exp\{i(A+i\alpha)\eta^2\}\varphi(a)d\eta + \int_a^{\infty} [e(\xi)-1]\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi(a)d\xi \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{A+i\alpha}}\varphi(a) + \int_a^{\infty} [e(\xi)-1]\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi(a)d\xi.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
I_0 = {}& \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{A+i\alpha}} e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi(a) \\
&+ e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{\infty} [e(\xi)-1]\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi(a)d\xi \\
&+ e^{i(A+i\alpha)f(a)}\left[\int_a^{b_1} e(\xi)\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}(\varphi_1(\xi)-\varphi(a))d\xi \right.\\
&\left. + \int_a^{b_1} [1-e(\xi)]\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi_1(\xi)d\xi\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$c=a+(b_1-a)/4$ として，任意の $q\in B$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\infty} \exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}q(1-e(\xi))d\xi \\
&= \int_c^{\infty} \exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}q(1-e(\xi))d\xi \\
&= \frac{1}{2i(A+i\alpha)}\int_c^{\infty} \frac{1-e(\xi)}{\xi-a}\, d\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}q \\
&= \frac{i}{2(A+i\alpha)}\int_c^{\infty} \exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}q\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1-e(\xi)}{\xi-a}\right)d\xi \\
&= \left[\frac{i}{2(A+i\alpha)}\right]^N \int_c^{\infty} \exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}q\left[\frac{d}{d\xi}\circ\frac{1}{\xi-a}\right]^N (1-e(\xi))d\xi
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\int_a^{\infty} \exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi(a)(1-e(\xi))d\xi \in D(A^\infty)$$

を得る．さらに，

$$\Phi_1(\xi)=\begin{cases}\varphi_1(\xi), & a\leqq\xi\leqq b_1\\ 0, & \xi>b_1\end{cases}$$

とおくと，$\Phi_1(\xi)\in C_0^\infty[B]$であるから，補題6.8により，

$$\int_a^{b_1}[1-e(\xi)]\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\varphi_1(\xi)d\xi$$

$$=\int_a^\infty[1-e(\xi)]\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\Phi_1(\xi)d\xi\in D(A^\infty)$$

である．したがって，

$$I_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{A+i\alpha}}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi(a)$$

$$+e^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1}e(\xi)\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}(\varphi_1(\xi)-\varphi(a))d\xi+\chi_1(a)$$

を得る．ここで，$\chi_1(a)\in D(A^\infty)$であり，aに関して無限回微分可能である．第2項に関しては，明らかに次式が成り立つ．

$$\int_a^{b_1}e(\xi)\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}(\varphi_1(\xi)-\varphi(a))d\xi=\frac{i}{2}(A+i\alpha)^{-1}\varphi_1'(a)$$

$$+i(A+i\alpha)^{-1}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{e(\xi)[\varphi_1(\xi)-\varphi(a)]}{2(\xi-a)}\right\}d\xi$$

$$=\frac{i}{2}(A+i\alpha)^{-1}\varphi_1'(a)+i(A+i\alpha)^{-1}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\frac{d\psi}{d\xi}d\xi.$$

ここで，$\psi(\xi)=e(\xi)(\varphi_1(\xi)-\varphi_1(a))/2(\xi-a)$．ゆえに$I_0$に関して次式を得る．

$$I_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{A+i\alpha}}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_1(a)+\frac{i}{2}e^{i(A+i\alpha)f(a)}(A+i\alpha)^{-1}\varphi_1'(a)$$

$$+i(A+i\alpha)^{-1}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\frac{d\psi}{d\xi}d\xi+\chi_1(a).\tag{2.13}$$

ここで，$\psi(\xi)\in C^\infty[B]$は，$\psi^k(b_1)=0\ (k=0,1,\cdots)$，$\psi(a)\neq0$を満たす．(2.13)を(2.12)に代入してわれわれは求める公式を得る．

$$(A+i\alpha)^{(m+1)/2}\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{i(m+1)\pi/4}e^{iAf(a)}g(a)$$

$$+(A+i\alpha)^{-1/2}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_1(a)+(A+i\alpha)^{-1}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_2(a)$$

$$+(A+i\alpha)^{-1}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\psi_1(\xi)d\xi+\chi_1(a).\tag{2.14}$$

ここで，$\varphi_1(a), \varphi_2(a), \psi_1(\xi)$ および $\chi_1(a)$ はそれぞれ補題で述べられた条件を満たす．

m が偶数の場合　(2.10) より

$$\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)dt = i^{m/2}(A+i\alpha)^{-m/2}\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)}f_1(t)dt, \tag{2.15}$$

$$f_1(t)\in C^\infty[B], \qquad f_1(a)=\frac{(m-1)!!g_1(a)}{[f''(a)]^{m/2}} \neq 0$$

であった．(2.13) を利用して次式を得る．

$$\begin{aligned}(A+i\alpha)^{(m+1)/2}&\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)dt\\ &=\frac{\sqrt{\pi}}{2}i^{(m+1)/2}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_4(a)+(A+i\alpha)^{-1/2}e^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_3(a)\\ &\quad+(A+i\alpha)^{-1/2}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\psi_2(\xi)d\xi+\chi_2(a).\end{aligned} \tag{2.16}$$

ここで，$\varphi_4(a)=e^{\alpha f(a)}f_1(a)\sqrt{\dfrac{2}{f''(a)}}$，$\varphi_3(a)$ および $\chi_2(a)$ は a に関して無限回微分可能，$\psi_2(\xi)\in C^\infty[B], \chi_2(a)\in D(A^\infty)$ である．$f_1(a)=(m-1)!!g(a)/[f''(a)]^{m/2}$ に注意すれば，求める公式

$$\begin{aligned}(A+i\alpha)^{(m+1)/2}&\int_a^b e^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)dt\\ &=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{i(m+1)\pi/4}e^{iAf(a)}g(a)\\ &\quad+(A+i\alpha)^{-1/2}e^{iAf(a)}\varphi_3(a)\\ &\quad+(A+i\alpha)^{-1/2}\int_a^{b_1}\exp\{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2\}\psi_2(\xi)d\xi+\chi_2(a)\end{aligned} \tag{2.17}$$

を得る．ここで，$\varphi_3(a), \psi_2(\xi), \chi_2(a)$ は補題で述べた条件を満たす．

（証明終り．）

(2.8)，(2.9) の公式の右辺にあらわれる積分に対して，さらに (2.8)，(2.9) を適用するという操作をくり返し行なえば，積分 (2.7) を $(A+i\alpha)^{-1/2}$ の冪でもって展開することができる．

さて，次に，積分

$$\int_{-b}^{b} e^{iAf(t)}g(t)dt$$

を考察しよう．ここで，$g^{(j)}(b)=g^{(j)}(-b)=0\,(j=0,1,\cdots)$，$f'(a)=0, f''(a)>0$, $f'(t)\neq 0\,(t\neq a)$ である．この積分を

$$\int_{-b}^{a} e^{iAf(t)}g(t)dt+\int_{a}^{b} e^{iAf(t)}g(t)dt$$

と分解し，補題6.9を適用すれば，この積分が$(A+\alpha_0 i)^{-1/2}$ の冪に展開されることがわかる．この場合，奇数次の冪は消え偶数次の冪のみが現われることは見易い．すなわち，

$$\sqrt{A}\int_{-b}^{b} e^{iAf(t)}g(t)dt=\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{(A+i\alpha_0)^j}e^{iAf(a)}g_j(a)+F_{N+1}(a). \quad (2.18)$$

ここで，$F_{N+1}(a)\in D(A^{N+1})$ は a に関して $N+1$ 回微分可能，$g_j(a)\in C^\infty[B]$,

$$g_0(a)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{(i\pi/4)\operatorname{sgn} f''(a)}g(a).$$

特に，A^{-1} が有界ならば，$\alpha_0=0$ とできる．

3° 1次元の場合．展開の初項

以下われわれは次の補題を必要とする．

補題 6.10 $g(t)\in C^{[m/2]+1}([0,a];B)$ は，条件：$g^j(a)=0\,(j=0,1,\cdots)$，$g(0)\neq 0$ を満たし，$f(t)\in C^{[m/2]+3}[0,a]$は，条件：$f'(0)=0$，$f''(0)\neq 0$，$f'(t)\neq 0\,(t\in(0,a])$ を満たすとする．このとき，積分

$$I(k)=\int_0^a e^{ikf(t)}t^m g(t)dt \quad (2.19)$$

は $k\to\infty$ で次のように表わされる．

$$I(k)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{|f''(0)|}\right]^{(m+1)/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{(i(m+1)\pi/4)\operatorname{sgn} f''(0)}$$
$$\times k^{-(m+1)/2}e^{ikf(0)}g(0)(1+\sigma_k). \quad (2.20)$$

ここで，$\|\sigma_k\|_B\to 0\,(k\to\infty)$.

証明 明らかに函数 $f'(t)$ は，

$$f'(t)=t\varphi(t), \qquad \varphi(t)\in C^{[m/2]+1}[0,a]$$

と表わされる．積分(2.19)を$[m/2]$回部分積分して，

$$I(k)=\int_0^a e^{ikf(t)}\frac{t^m g(t)}{f'(t)}df(t)=\frac{1}{ik}\int_0^a \frac{t^m g(t)}{f'(t)}de^{ikf(t)}$$

$$=\frac{(-1)^{[m/2]}}{(ik)^{[m/2]}}\int_0^a e^{ikf(t)}\frac{1}{f'(t)}\left[\frac{d}{dt}\circ\frac{1}{f'(t)}\right]^{[m/2]}t^m g(t)df(t)$$

を得る．函数

$$\psi(t)=(1/f'(t))[d/dt\circ 1/f'(t)]^{[m/2]}t^m g(t) \tag{2.21}$$

は m が偶数の場合，

$$\psi(t)=\frac{(m-1)!!\varphi_1(t)}{f'(t)},\qquad \varphi_1(t)\in C^1([0,a];B), \tag{2.22}$$

$$\varphi_1(0)=\frac{g(0)}{[f''(0)]^{[m/2]}}$$

と表わされるから，$t=0$ で1次の極をもつ．m が奇数の場合 $\psi(t)$ は，

$$\psi(t)=\frac{(m-1)!!\varphi_2(t)t}{f'(t)},\qquad \varphi_2(t)\in C^1,$$

$$\varphi_2(0)=\frac{g(0)}{[f''(0)]^{(m-1)/2}} \tag{2.23}$$

と表わされる．したがって，$\psi(t)$ は1回連続微分可能で

$$\psi(0)=\frac{(m-1)!!(0)}{[f''(0)]^{(m+1)/2}}$$

である．ゆえに，m が奇数の場合，

$$I(k)=\left(\frac{i}{k}\right)^{(m+1)/2}e^{ikf(0)}\psi(0)+\left(\frac{i}{k}\right)^{(m+1)/2}\int_0^a e^{ikf(t)}\psi'(t)dt$$

$$=\left(\frac{i}{kf''(0)}\right)^{(m+1)/2}(m-1)!!e^{ikf(0)}g(0)(1+\sigma^k)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{|f''(0)|}\right]^{(m+1)/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{(i(m+1)\pi/4)\,\mathrm{sgn}\,f''(0)}$$

$$\times k^{-(m+1)/2}e^{ikf(0)}g(0)(1+\sigma_k) \tag{2.24}$$

を得る．ここで $\|\sigma_k\|_B\to 0$ $(k\to\infty)$.

m が偶数の場合，

$$k^{(m+1)/2}I(k)=\sqrt{k}\int_0^a e^{ikf(t)}\varphi_3(t)dt=I_1(k)$$

$$\varphi_3(t)=i^{m/2}(m-1)!!\varphi_1(t) \tag{2.25}$$

が成り立つ．ここで $f''(0)\neq 0$ ゆえ，十分小さな α に対して $f''(t)\neq 0$ $(t\in[0,\alpha])$

であることに注意して積分 $I_1(k)$ を三つに分けよう．

$$I_1(k)=\sqrt{k}\left\{\int_0^{N/\sqrt{k}}+\int_{N/\sqrt{k}}^{\alpha}+\int_{\alpha}^{a}\right\}.$$

第2項は以下のように評価される．

$$\left|\sqrt{k}\int_{N/\sqrt{k}}^{\alpha}e^{ikf(t)}\varphi_3(t)dt\right|=\left|\frac{e^{ikf(t)}\varphi_3(t)}{\sqrt{k}\,f'(t)}\right|_{N/\sqrt{k}}^{\alpha}-\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{N/\sqrt{k}}^{\alpha}e^{ikf(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi_3(t)}{f'(t)}\right)dt\right|$$

$$\leqq\frac{C_1}{\sqrt{k}}\frac{1}{|f'(N/\sqrt{k})|}+\frac{C_2}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{N/\sqrt{k}}^{\alpha}\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi_3(t)}{f'(t)}\right)\right|dt\leqq\frac{C_3}{N}+\frac{C_4}{\sqrt{k}}.$$

ここで

$$\int_{N/\sqrt{k}}^{\alpha}\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi_3}{f'}\right)\right|dt\leqq C_5\int_{N/\sqrt{k}}^{\alpha}\frac{dt}{(f'(t))^2}$$

$$\leqq C_6\int_{N/\sqrt{k}}^{\alpha}\frac{|f''(t)|}{(f'(t))^2}dt=\frac{C_6}{|f'(t)|}\bigg|_{N/\sqrt{k}}^{\alpha}\leqq\frac{C_6\sqrt{k}}{N}$$

を用いた．次に第3項は，

$$\sqrt{k}\int_{\alpha}^{a}e^{ikf(t)}\varphi_3(t)dt=\frac{1}{i\sqrt{k}}\int_{\alpha}^{a}\frac{\varphi_3(t)}{f'(t)}de^{ikf(t)}$$

$$=O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

と評価されるから，

$$\lim_{k\to\infty}k^{(m+1)/2}e^{-ikf(0)}I(k)=\lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_0^N\exp\left\{ik\left[f\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)-f(0)\right]\right\}\varphi_3\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)d\xi$$

$$=\varphi_3(0)\lim_{N\to\infty}\int_0^N\exp\left\{\frac{if''(0)\xi^2}{2}\right\}d\xi$$

$$=\varphi_3(0)\sqrt{\frac{2}{|f''(0)|}}\int_0^{\infty}\exp\{i\xi^2\,\mathrm{sgn}\,f''(0)\}\,d\xi$$

$$=\varphi_3(0)\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(0)|}}\exp\left\{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}\,f''(0)\right\}$$

$$=\frac{i^{m/2}(m-1)!!g(0)}{[f''(0)]^{m/2}}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(0)|}}\exp\left\{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}\,f''(0)\right\}$$

を得る．したがって m が偶数の場合も，公式

$$I(k)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{|f''(0)|}\right]^{(m+1)/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\exp\left\{\frac{i(m+1)\pi}{4}\mathrm{sgn}\,f''(0)\right\}$$

$$\times k^{-(m+1)/2}e^{ikf(0)}g(0)(1+\sigma_k)$$

が成り立つ．ここで $\|\sigma_k\|_B \to 0\,(k\to\infty)$．　　　（証明終り．）

注意1　補題の仮定が $f''(0)\neq 0$ を除いて満足されているとする．このとき補題の証明から，$f''(0)=0$ ならば

$$\lim_{k\to\infty} |I(k)| k^{(m+1)/2} = \infty$$

が得られる．

4°　多次元の場合

$g(x)=g(x_1, \cdots, x_n)$ は $\Omega_0=\{|x_j-x_j{}^0|\leqq\delta, j=1, \cdots, n\}$ で定義され，Banach 空間 B に値をもつ $[n/2]+1$ 回微分可能な函数で，Ω_0 の境界ではその任意の導函数と共に消えるものとする．$f(x)\in C^{[n/2]+4}(\Omega_0)$ は，$x=x_0$ のみを停留点（すなわち $\mathrm{grad}\, f(x_0)=0$）とし，行列 $R=\left\|\dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{i,j=1}^n$ は非退化で不定符号とする．このとき，

$$I(k) = \int_{\Omega_0} e^{ikf(x)} g(x) dx$$

に関して，次の補題が成り立つ．

補題 6.11　$I(k)$ は $k\to\infty$ で次の漸近形をもつ．

$$I(k) = \frac{e^{i\pi\delta/4}(2\pi)^{n/2}}{k^{n/2}\sqrt{|J|}} e^{ikf(x_0)} g(x_0)(1+\sigma_k). \tag{2.26}$$

ここで δ は行列 R に付随した2次形式の慣性指数，$J=\det R$, $\|\sigma_k\|\to 0\,(k\to\infty)$.

証明　明らかに次式が成り立つ．

$$I(k) = \int_{-\delta}^{\delta}\cdots\int_{-\delta}^{\delta} \exp\{ikf(x_0+\eta)\}\, g(x_0+\eta) d\eta, \qquad \eta = x-x_0. \tag{2.27}$$

十分小さな η に関して，$f(x)$ は

$$f(x_0+\eta) = f(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\eta_i\eta_j + \cdots \tag{2.28}$$

と Taylor 展開される．そこで，2次形式

$$Q(\eta) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\eta_i\eta_j$$

を標準形

$$Q(\eta) = \tilde{Q}(\xi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i{}^2$$

に移すような直交変換を行なえば，十分小さな ξ に対して

$$f_1(\xi) = f(\eta(\xi)+x_0) = f(x_0)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i{}^2+\cdots \tag{2.29}$$

を得る．$\dfrac{D\xi}{D\eta}=1$ ゆえ，積分(2.27)は[1)]

$$I(k) = \int_{-\delta_1}^{\delta_1}\cdots\int_{-\delta_n}^{\delta_n}\exp\{ikf_1(\xi)\}g_1(\xi)d\xi, \qquad g_1(\xi) = g(\eta(\xi)+x_0) \tag{2.30}$$

と書ける．ここで，$\lambda_1, \cdots, \lambda_p>0$，$\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n<0$ とする．さらに変数変換 $y_j=|\lambda_j|^{1/2}\xi_j$ を行なえば，

$$f_2(y) = f_1(\xi(y))-f(x_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}y_i{}^2-\frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{n}y_j{}^2+\cdots,$$

$$g_2(y) = g_1(\xi) = g_1\left(\frac{y_1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \cdots, \frac{y_n}{\sqrt{|\lambda_n|}}\right)$$

として，積分(2.30)は

$$I(k) = \frac{\exp\{ikf(x_0)\}}{\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|^{1/2}}\int_{-\delta_1'}^{\delta_1'}\cdots\int_{-\delta_n'}^{\delta_n'}\exp\{ikf_2(y)\}g_2(y)dy$$

$$= \frac{\exp\{ikf(x_0)\}}{\sqrt{J}}I_1(k) \tag{2.31}$$

となる．ここで

$$J = \det R = \det\left\|\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{i,j\le n}.$$

次に，2 重極座標

$$y_i = \tau Q_i(\alpha), \qquad y_j = \rho Q_j(\beta), \qquad (i = 1, \cdots, p,\ \ j = p+1, \cdots, n)$$

に移ろう．$f_3(\tau, \rho, \alpha, \beta)=f_2(y)$，$g_3(\tau, \rho, \alpha, \beta)=g_2(y)$ として次式を得る．

$$I(k) = \iint d\Omega_1 d\Omega_2\int_0^a\int_0^b\exp\{ikf_3(\tau, \rho, \alpha, \beta)\}g_3(\tau, \rho, \alpha, \beta)\tau^{p-1}\rho^{n-p-1}d\rho d\tau. \tag{2.32}$$

明らかに，$f_3(\tau, \rho, \alpha, \beta)=\tau^2/2-\rho^2/2+\cdots$ はすべての変数に関して $f(x)$ と同じだけ連続微分可能である．$f_3(\tau, \rho)$ は(角変数を省略する)

$$f_3(\tau, \rho) = f_3(\tau, \rho)-f_3(\tau, 0)+f_3(\tau, 0),$$

$$f_3(\tau, 0) = \tau^2 f_4(\tau),$$

1)〔訳注〕 Ω_0 を含む領域 Ω_1 で，変数変換 $x_0+\xi(\eta)$ によって領域 $[-\delta_1, \delta_1]\times\cdots\times[\delta_n, \delta_n]$ に移るものをとり，$g(x)$ を $\Omega_1\backslash\Omega_0$ では零として拡張すれば(2.30)が得られる．以下同様に解釈すればよい．

$$f_3(\tau,\rho)-f_3(\tau,0)=\rho\frac{\partial f_3(\tau,0)}{\partial\rho}-\rho^2 f_5(\tau,\rho),$$

$$\rho\frac{\partial f_3}{\partial\rho}(\tau,0)=\rho\tau^2 f_6(\tau)$$

と分解されるから，

$$f_3(\tau,\rho)=\tau^2[f_4(\tau)+\rho f_6(\tau)]-\rho^2 f_5(\tau,\rho)$$

を得る．そこで変数変換

$$\xi_1{}^2=\tau^2[f_4(\tau)+\rho f_6(\tau)],\qquad \xi_2{}^2=\rho^2 f_5(\tau,\rho),$$

$$\xi_{j+2}=\alpha_j,\qquad (j=1,\cdots,p-1),$$

$$\xi_{p+1+i}=\beta_i,\qquad (i=1,\cdots,n-p-1)$$

を行なって，

$$I(k)=\iint d\Omega_1 d\Omega_2\int_0^{a_1}\int_0^{b_1}\exp\{ik(\xi_1{}^2-\xi_2{}^2)\}\xi_1{}^{p-1}\xi_2{}^{n-p-1}g_4(\xi)d\xi_1 d\xi_2, \tag{2.33}$$

$$g_4(\xi)=g_3[\tau(\xi),\rho(\xi),\xi_3,\cdots,\xi_n]\frac{D(\tau,\rho)}{D(\xi_1,\cdots,\xi_n)}[f_4+\rho f_6]^{-(p-1)/2}(f_5)^{-(n-p-1)/2}$$

を得る．今，

$$f_7(\tau,\rho)=\tau^2[f_4(\tau)+\rho f_6(\tau)],\qquad f_8(\tau,\rho)=\rho^2 f_5(\tau,\rho)$$

と書こう．すると，

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial\tau}=\frac{\dfrac{\partial f_7}{\partial\tau}}{2\sqrt{f_7}},\qquad \frac{\partial\xi_2}{\partial\tau}=\frac{\dfrac{\partial f_8}{\partial\tau}}{2\sqrt{f_8}}$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial\rho}=\frac{\dfrac{\partial f_7}{\partial\rho}}{2\sqrt{f_7}},\qquad \frac{\partial\xi_2}{\partial\rho}=\frac{\dfrac{\partial f_8}{2\rho}}{2\sqrt{f_8}}$$

であるから，$\dfrac{D(\xi_1,\xi_2)}{D(\tau,\rho)}$ は ξ_1,ξ_2 が十分小さければ零と異なる．したがって，函数

$$\psi(\xi_1,\xi_2)=\frac{D(\tau,\rho)}{D(\xi_1,\xi_2)}=\left(\frac{D(\xi_1,\xi_2)}{D(\tau,\rho)}\right)^{-1}$$

は，$[n/2]+2$ 回微分可能である．ゆえに，

$$g_4(\xi)\in C^{[n/2]+1}.$$

さて，積分

$$I_1(k)=\int_0^{a_1}\int_0^{b_1}\exp\{ik(\xi_1{}^2-\xi_2{}^2)\}\xi_1{}^{p-1}\xi_2{}^{n-p-1}g_4(\xi)d\xi_1 d\xi_2$$

を研究しよう．$g_4(\xi)$ は $\xi_1=a_1$, $\xi_2=b_1$ でそのすべての導函数と共に消えるから，部分積分によって，われわれは次式を得る．

$$I_1(k)=\left(\frac{i}{2k}\right)^q(-1)^{-[(n-p-1)/2]}\int_0^{a_1}d\xi_1\int_0^{b_1}\exp\{ik(\xi_1{}^2-\xi_2{}^2)\}$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\circ\frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]}\xi_1{}^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\circ\frac{1}{\xi_2}\right)^{[(n-p-1)/2]}\xi_2{}^{n-p-1}g_4 d\xi_2. \tag{2.34}$$

ここで，$q=[(p-1)/2]+[(n-p-1)/2]$．なお函数

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\circ\frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]}\xi_1{}^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\circ\frac{1}{\xi_2}\right)^{[(n-p-1)/2]}\xi_2{}^{n-p-1}g_4(\xi)$$

は，$\xi_1=\xi_2=0$ で1次以上の零点をもたない．まず，次の積分

$$I_2(k,\xi_1)=\int_0^{b_1}\exp(-ik\xi_2{}^2)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\circ\frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]}\xi_1{}^{p-1}$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\circ\frac{1}{\xi_2}\right)^{[(n-p-1)/2]}\xi_2{}^{n-p-1}g_4(\xi)d\xi_2 \tag{2.35}$$

を評価しよう．そのために，$n-p-1$ が偶数か奇数かによって二つの場合に分けて考えよう．$n-p-1$ が偶数の場合

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\circ\frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]}\xi_1{}^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\circ\frac{1}{\xi_2}\right)^{(n-p-1)/2}\xi_2{}^{n-p-1}g_4(\xi)$$
$$=(n-p-2)!!\varphi(\xi_1,\xi_2)=c_1(n,p)\varphi(\xi_1,\xi_2).$$

ここで，函数 $\varphi(\xi_1,\xi_2)\in C^2[0,b_1]$ かつ

$$\varphi(\xi_1,0,\xi_3,\cdots,\xi_n)=\varphi(\xi_1,0)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\circ\frac{1}{\xi_1}\right)^{[(p-1)/2]}\xi_1{}^{p-1}g_4(\xi_1,0,\xi_3,\cdots,\xi_n).$$

したがって，補題 6.7，6.10 によって

$$I_2(k,\xi_1)=c_1(n,p)\int_0^{b_1}\exp(-ik\xi_2{}^2)\varphi(\xi_1,\xi_2)d\xi_2=\frac{1}{2}\frac{c_1(n,p)}{\sqrt{k}}\sqrt{\pi}\,e^{-i\pi/4}\varphi(\xi_1,0)$$
$$+c_1(n,p)\int_0^{b_1}\exp(-ik\xi_2{}^2)e(\xi_2)\xi_2\psi(\xi_1,\xi_2)d\xi_2+O(k^{-\infty}).$$

ここで，

$$e(\xi_2) = \begin{cases} 1, & \xi \leqq \dfrac{b_1}{4} \\ 0, & \xi \geqq \dfrac{b_1}{2} \end{cases}, \qquad e(\xi_2) \in C^\infty,$$

$$\xi_2 \psi(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\xi_1, 0).$$

第2項に関しては，部分積分によって次式を得る．

$$\begin{aligned} I_3(k, \xi_1) &= \int_0^{b_1} \exp(-ik\xi_2{}^2) e(\xi_2) \xi_2 \psi(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \\ &= -\frac{i}{2k} \psi(\xi_1, 0) - \frac{i}{2k} \int_0^{b_1} \exp(-ik\xi_2{}^2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} [e(\xi_2) \psi(\xi_1, \xi_2)] d\xi_2. \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} I_2(k, \xi_1) &= \frac{c_1(n, p)}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\pi/4} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \circ \frac{1}{\xi_1} \right)^{[(p-1)/2]} \xi_1{}^{p-1} g_4(\xi_1, 0) \\ &\quad + c_2(n, p) \frac{\psi(\xi_1, 0)}{k} + \frac{c_3}{k} \int_0^{b_1} \exp(-ik\xi_2{}^2) \psi_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 + O(k^{-\infty}). \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} I_1(k) &= \left(\frac{i}{2k} \right)^q (-1)^{[(n-p-1)/2]} \frac{c_1(n, p)}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\pi/4} \\ &\quad \times \int_0^{a_1} \exp(ik\xi_1{}^2) \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \circ \frac{1}{\xi_1} \right)^{[(p-1)/2]} \xi_1{}^{p-1} g_4(\xi_1, 0) d\xi_1 \\ &\quad + \frac{c_2(n, p)}{k^{q+1}} \int_0^{a_1} \exp(ik\xi_1{}^2) \psi(\xi_1, 0) d\xi_1 \\ &\quad + \frac{c_3(n, p)}{k^{q+1}} \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} \exp\{ik(\xi_1{}^2 - \xi_2{}^2)\} \psi_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

右辺の第1項にあらわれる積分

$$I_4(k) = \int_0^{a_1} \exp(ik\xi_1{}^2) \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \circ \frac{1}{\xi_1} \right)^{[(p-1)/2]} \xi_1{}^{p-1} g_4(\xi_1, 0) d\xi_1$$

を評価しよう．$p-1$ が偶数の場合

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \circ \frac{1}{\xi_1} \right)^{(p-1)/2} \xi_1{}^{p-1} g_4(\xi_1, 0) = c_4(p) \varphi(\xi_1),$$

$$c_4(p) = (p-2)!!, \qquad \varphi(\xi_1) \in C^2, \qquad \varphi(0) = g_4(0)$$

であるから，補題 6.10 より

$$I_4(k)=c_4(p)\int_0^{a_1}\exp(ik\xi_1{}^2)\varphi(\xi_1)d\xi_1$$

$$=c_4(p)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}e^{i\pi/4}g_4(0,0)(1+\sigma_k) \tag{2.36}$$

を得る．残余項に関しては，明らかに

$$\left\|\int_0^{a_1}\exp(ik\xi_1{}^2)\psi(\xi_1,0)d\xi_1\right\|\to 0,\qquad (k\to\infty)$$

$$\left\|\int_0^{a_1}\int_0^{b_1}\exp\{ik(\xi_1{}^2-\xi_2{}^2)\}\psi_1(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2\right\|\to 0,\qquad (k\to\infty) \tag{2.37}$$

が成り立つから，(2.36)，(2.37) より，

$$I_1(k)=\left(\frac{i}{2k}\right)^q\frac{(-1)^{-(n-p-1)/2}}{k}c_1(n,p)c_4(p)\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}g_4(0,0)(1+\sigma_k)$$

を得る．ここで，

$$\sqrt{\pi}\,c_1(n,p)=\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)2^{(n-p-1)/2}$$

$$\sqrt{\pi}\,c_4(p)=\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)2^{(p-1)/2},\qquad g_4(0,0)=g(x_0)2^{n/2},$$

$i^q(-1)^{-(n-p-1)/2}=e^{i\pi\delta/4}$,　　$\delta: R=\|\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j\|$ の慣性指数

に注意すれば，次式が成り立つことがわかる．

$$I_1(k)=\frac{e^{i\pi\delta/4}2^{n/2}}{k^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)g(x_0)(1+\sigma_k).$$

したがって，

$$\iint d\Omega_1 d\Omega_2=(\pi)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)$$

より，

$$I(k)=\frac{e^{i\pi\delta/4}(2\pi)^{n/2}}{k^{n/2}\sqrt{|J|}}g(x_0)\exp\{ikf(x_0)\}(1+\sigma_k),$$

$$\|\sigma_k\|_B\to 0,\qquad (k\to\infty)$$

が成り立つ．残りの三つの場合も同様である．　　　　　　　　　　（証明終り．）

補題 6.9 と同様にして，次の積分の漸近展開を得ることができる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{iAf(x)}g(x)dx,\qquad x=(x_1,\cdots,x_n) \tag{2.38}$$

ここで，$f(x)\in C^\infty$，$\mathrm{grad}\, f(x_0)=0$，$\mathrm{grad}\, f(x)\neq 0\ (x\neq x_0)$，$g(x)\in C_0^\infty[B]$，$A$は条件1)–3)を満たす．

補題 6.12　上に述べた仮定のもとで次の展開が成り立つ．

$$A^{n/2}\int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}}\int e^{iAf(x)}g(x)dx = e^{if(x_0)A}\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{(A+i\alpha)^j}g_j(x_0) + F_{N+1}(x_0),\qquad x=(x_1,\cdots,x_n).\tag{2.39}$$

ここで，$g_j(x_0)$はx_0に関して無限回微分可能なB–値函数，$F_{N+1}(x)\in D(A^{N+1})$は$N+1$回微分可能なB–値函数，そして

$$g_0(x_0)=g(x_0)\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|J|}}e^{i\pi\delta/4}.$$

注意 1　1次元の場合の公式(2.18)と同様に，漸近展開には$(A+i\alpha)^{-1}$の整数冪しか現われない．$(A+i\alpha)^{-1}$の半整数次冪に対応する項は，普通の函数の場合と全く同じに，(2.33)式において角変数に関して積分することにより消えてしまうのを確かめるのは容易である．(Федорюк[1]–[2]参照.)

注意 2　Aが§1の条件1), 2a), 3)を満たす場合も類似の公式が成り立つ．この場合，展開に現われる函数$g_j(x_0)$はAが正の場合の公式(2.39)における対応する函数の複素共役になり，$A^{n/2}$は$|A|^{n/2}$すなわち$(-A)^{n/2}$におきかえねばならない．

注意 3　作用素Aは条件2)も条件2a)も満たさないが，$g(t)$が$g_+(t)$と$g_-(t)$ $(g_+(t)\in B_+\subset B,\ g_-(t)\in B_-\subset B)$の和に分解され，$A$は$B_+$では条件2), 3), B_-では条件2a), 3)を満たしているような場合にも漸近展開が求められるのは明らかである．さらに，展開は$g(t)$が第1章§1–2°の意味での一般函数の場合にも適用できる．そのためには，等式(2.39)の両辺にA^l (l：十分大きな自然数)を作用させ，$A^lD(A^m)=D(A^{m-l})$を考慮すればよい．

例　$B=L_2[-\infty,\infty]$：τに関する2乗可積分函数の全体，$A=i\dfrac{\partial}{\partial\tau}$，$g(t,\tau)=g_0(t)\delta(\tau)$ (第2章§1–8°参照)，$g_0(t)\in C_0^\infty$とする．このとき，

$$g_0(t)\delta_+(\tau)\in B_+,\qquad g_0(t)\delta_+{}^*(\tau)\in B_-.$$

今，$f(t)\in C^\infty$，$\mathrm{grad}\, f(0)=0$とするならば，

$$e^{iAf(t)}g_0(t)\delta(\tau)=g_0(t)\delta(\tau-f(t))$$

が成り立つ．したがって偶数の n に対して，次式を得る．

$$\int_{-a}^{a}\cdots\int_{-a}^{a}g_0(t)\delta^{(n/2)}(\tau-f(t))dt$$

$$=\frac{(2\pi)^{n/2}g_0(0)}{\sqrt{|J|}}\{e^{i\pi\delta/4}\delta_+[\tau-f(0)]+e^{-i\pi\delta/4}\delta_+{}^*[\tau-f(0)]\}+F(\tau)$$

$$=\frac{2(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|J|}}g_0(0)\mathrm{Re}\{e^{i\pi\delta/4}\delta_+[\tau-f(0)]\}+F(\tau)$$

ここで $F(\tau)\in L_2$, δ および J は先に定義したもの．

注意 4[1]　最後に補題 6.10 に対する注意と類似の命題が多変数の場合にも成り立つことを注意しよう．すなわち，任意の $g\in C_0^\infty$ に対して $\overline{\lim_{k\to\infty}}\, k^{n/2}|I(k)|<\infty$ ならば，f の停留点において $\det\|\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j\|\neq 0$ であり，$I(k)$ に対して停留位相の方法が適用できる．

§3　抽象的方程式の解の局所的漸近形[2]

1°　作用素係数の方程式に対する Cauchy 問題

1. Banach 空間の単調減少列：$B^{\nu+1}\subset B^{\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots)$ によって定義される可算ノルム空間を B^∞ とする．

作用素

$$L=\sum_{i=0}^{m}L_i(p_1,\cdots,p_n,x_1,\cdots,x_{n+1},h)p_{n+1}{}^i,\qquad (x_{n+1}=t)$$

を研究しよう．ここで L は $2n+2$ 個のパラメーターに関して無限回微分可能，すなわち L の任意の導函数が B^∞ を B^∞ に移すものとする．

さて，変数 $x_1,\cdots,x_{n+1},h$ の B^∞-値函数のなす可算ノルム空間 R_h を導入しよう．R_h は可算個のノルム

$$\max_{0\leqq x_{n+1}\leqq T}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\prod_{\nu,m}\left(ih\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{l_\nu}x_m{}^{l_m}f(x_1,\cdots,x_{n+1},h)\right\|_{B^k}^2 dx_1\cdots dx_n\leqq \mathrm{const},$$

$$(0\leqq h\leqq 1,\ \sum l_\nu=k,\ 1\leqq \nu,m\leqq n+1)$$

によって定義される．V_h は R_h を含む可算ノルム空間とし，$R_h{}^0$ は R_h に含ま

1)〔訳注〕　この注意は一般には正しいと思われるが，厳密な証明はまだ得られていないようである．

2)　ここで用いられる方法の思想的側面は Heading の本の著者による後書き(Маслов[14])に鮮明に述べられている．ここでは計算がより詳細になされ，結果もより一般的な形で与えられる．

れる函数で x_{n+1} に依らないものを表わすとする.

注意 この章では $\{B_i\}(i=1,2,\cdots)$ が Hilbert 空間の場合だけを考える. B_i が Hilbert 空間の場合には $\Phi_{1/h}{}^{p_n}R_h\subset R_h$ が成り立つが, B^i が Banach 空間のときはわれわれは $h^{n/2}\Phi_{1/h}{}^{p_h}R_h\subset R_h$ だけしか主張できない. このような事情はここで導かれる定理の証明の道筋には影響しないが, 定理 4.4 の証明に必要な評価に対して障害となる.

空間 R_h で次の作用素を研究しよう.

$$\hat{L}=\sum_{j=0}^{m}\hat{L}_j\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n},x_1,\cdots,x_{n+1},h\right)\left(ih\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)^j.$$

なお作用素 $-ih\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,-ih\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ は最初に作用するものとする[1]. すなわち,

$$\begin{aligned}\hat{L}_j(\hat{p},x,t,h)\varphi(x)&=\hat{L}_j\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n},x_1,\cdots,x_{n+1},h\right)\varphi(x)\\&=\Phi^{p_1\cdots p_n}L(p,x,t,h)\Phi^{\xi_1\cdots\xi_n}\varphi(\xi).\end{aligned}$$

$x_{n+1}=t_0$ においてその $m-1$ 階までの導函数がすべて消えるような R_h の元の集合に $\hat{L}$ を制限して得られる作用素を $\hat{\tilde{L}}$ と書こう. 今, $\hat{L}$ は次の条件を満たすと仮定する.

1) $\hat{\tilde{L}}^{-1}$ が存在して, $h^{\tau}\hat{\tilde{L}}^{-1}R_h\subset V_h$.

2) 方程式:
$$\begin{cases}\hat{L}\psi=0\\ \left.\dfrac{\partial^j\psi}{\partial t^j}\right|_{x_{n+1}=t_0}\in R_h{}^0, & (j=0,\cdots,m-1)\end{cases}$$

に対して, $t_0\leqq x_{n+1}\leqq T$ において, 条件: $h^{\tau}\psi\in V_h$ を満たす解が一意に存在する.

定理 4.1 の仮定が満たされるならば, 条件 1), 2) が満たされるのは明らかである. このことは補題 5.2 から得られる.

---

1) ここで $\Phi^{p_1\cdots p_k}=\Phi_A{}^{p_k}\left(A=\dfrac{1}{h}\right)$ (第2章 §2 参照). すなわち,

$$\Phi^{p_1\cdots p_k}\varphi(p)=(-2\pi ih)^{-k/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipx/h}\varphi(p)dp.$$

$\Phi^{\xi_1\cdots\xi_k}=\Phi_A{}^{\xi_k}\left(A=\dfrac{1}{h}\right)$. すなわち,

$$\Phi^{\xi_1\cdots\xi_k}\varphi(\xi)=(2\pi ih)^{-k/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ip\xi/h}\varphi(\xi)d\xi.$$

2.　$$\psi(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}, h)$$
$$= \varphi(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}, h)\exp\left\{\frac{i}{h}S(p, x)\right\}$$

とおく．ここで，$S(p, x)=S(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})\in C^\infty$，$\varphi(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}, h)$ は $0\leqq h\leqq 1, 0\leqq x_{n+1}\leqq T$ で無限回微分可能で，その任意の導函数が有界，かつ変数 $p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_n$ に関してその台が有界であるような B^∞-値函数である．公式を簡単にするために，$p_{k+1}, \cdots, p_{n+1}$ を $\xi_{k+1}, \cdots, \xi_{n+1}, x_1, \cdots, x_k$ を $\eta_1, \cdots, \eta_k$，$\hat{p}_i$ を $\hat{\xi}_i\,(i>k)$ と書こう．このとき，

$$\psi(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}, h) = \psi(p, x, h)$$
$$\hat{L} = \hat{L}(\eta, x, \hat{p}, \hat{\xi}, h) = \hat{L}\Big(\eta_1, \cdots, \eta_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}, -ih\frac{\partial}{\partial\eta_1}, \cdots, -ih\frac{\partial}{\partial\eta_k}, -ih\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \cdots, -ih\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, h\Big).$$

2°　作用素係数の線型偏微分作用素に対する漸近展開

補題 6.13　次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\hat{L}(\eta, x, \hat{p}, \hat{\xi}, h)\Phi^{p_1\cdots p_k}\psi(p, x, h) &= \Phi^{p_1\cdots p_k}\exp\left\{\frac{i}{h}S(p, x)\right\}\Big\{L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0)\varphi \\ &+ih\Big[\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L^0}{\partial\eta_j{}^0}\frac{\partial\varphi}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial L^0}{\partial\xi_j{}^0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \\ &-\frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial\eta_i{}^0\partial\eta_j{}^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial\xi_i{}^0\partial\xi_j{}^0} \\ &-2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 L^0}{\partial\eta_i{}^0\partial\xi_i{}^0} - 2\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 L^0}{\partial\eta_i{}^0\partial p_i}\Big)\varphi - i\frac{\partial L}{\partial h}\Big|_{h=0}\varphi\Big] \\ &+\sum_{i=2}^{n}h^iP_i\Big(p, \frac{\partial}{\partial p}, x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi\Big\} + h^{N+1}z_h(\eta, x, h).\end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで，

$$\eta_i{}^0 = -\partial S/\partial p_i, \qquad (i = 1, \cdots, k),$$
$$\xi_j{}^0 = \partial S/\partial x_j, \qquad (j = k+1, \cdots, n+1),$$
$$P_i\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\Big): \partial/\partial x, \partial/\partial p \text{ に関して } 2i \text{ 次の多項式},$$
$$z_h(\eta, x, h)\in R_h, \qquad L^0 = L(\eta^0, x, p, \xi^0, h)|_{h=0}.$$

証明　作用素 $\tilde{L}_j=\tilde{L}_j(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h)$ を次のように定義する．

$$\tilde{L}_j\psi=\tilde{L}_j\Big(ih\frac{\partial}{\partial p_1},\cdots,ih\frac{\partial}{\partial p_k},x_{k+1},\cdots,x_{n+1},p_1,\cdots,p_k,$$
$$-ih\frac{\partial}{\partial x_{k+1}},\cdots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n},h\Big)\psi(p,x,h)$$
$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=k+1}^{n}d\xi_j\prod_{i=1}^{k}d\eta_i\exp\Big\{\frac{i}{h}\Big(\sum_{j=k+1}^{n}\xi_jx_j-\sum_{i=1}^{k}\eta_ip_i\Big)\Big\}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{\frac{i}{h}\Big(\sum_{j=1}^{k}\eta_jp_j'-\sum_{j=k+1}^{n}\xi_jx_j'\Big)\Big\}$$
$$\times L_j(\eta_1,\cdots,\eta_k,x_{k+1},\cdots,x_n,p_1',\cdots,p_k',\xi_{k+1},\cdots,\xi_n,h)$$
$$\times\psi(p',x',h)\prod_{j=k+1}^{n}dx_j'\prod_{i=1}^{k}dp_i'.$$

明らかに，$\tilde{L}=\sum_{j=0}^{n}\tilde{L}_j\hat{\xi}_{n+1}{}^j=\Phi^{x_1,\cdots,x_k}\hat{L}\Phi^{p_1,\cdots,p_k}$．空間 $C^\infty[\boldsymbol{R}^{n+2},B^\infty]$ は，変数 $p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1}$，$h$ の函数で，$0\leqq h\leqq 1,0\leqq x_{n+1}\leqq a,0\leqq|p|\leqq\infty,0\leqq|x|<\infty$ で定義され，B^∞ に値を持つ C^∞ 級函数の全体; 空間 $C_\delta^\infty[\boldsymbol{R}^{n+2},B^\infty]$ は $0\leqq h\leqq 1$，$-\infty\leqq x_{n+1}\leqq\infty,0\leqq|p|<\infty,0\leqq|x|<\infty$ で定義された B^∞-値 C^∞ 級函数で，その台が $-\delta\leqq x_{n+1}\leqq a+\delta$ に含まれるものを表わすとする．さて，$\varphi\in C^\infty[\boldsymbol{R}^{n+2},B^\infty]$ に対して，$\varphi_\delta\in C_\delta^\infty[\boldsymbol{R}^{n+2},B^\infty]$ を $\varphi_\delta=\varphi\,(0\leqq x_{n+1}\leqq a)$ なるように選ぶならば，$\psi=\varphi(p,x,h)\exp\Big\{\frac{i}{h}S(p,x)\Big\}$ として，$\tilde{L}\psi_\delta=\tilde{L}\psi\,(0\leqq x_{n+1}\leqq a)$ が成り立つ．一方，函数 $\tilde{L}\psi_\delta$ は次のように表わされる．

$$\tilde{L}\psi_\delta=I(x,p,h)=\frac{1}{(2\pi h)^{n+1}}\int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}}\int\prod_{j=k+1}^{n+1}d\xi_j\prod_{i=1}^{k}d\eta_i$$
$$\times\exp\Big\{\frac{i}{h}\Big(\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_jx_j-\sum_{i=1}^{k}\eta_ip_i\Big)\Big\}\int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}}\int\exp\Big\{\frac{i}{h}\Big(\sum_{j=1}^{k}\eta_jp_j'-\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_jx_j'\Big)\Big\}$$
$$\times\tilde{L}(\eta,x,p',\xi,h)\varphi_\delta(p',x',h)\exp\Big\{\frac{i}{h}S(p',x')\Big\}\prod_{j=k+1}^{n+1}dx_j'\prod_{i=1}^{k}dp_i'.$$

次の積分を $I_1(\eta,x,\xi,h)$ で表わそう．

$$I_1(\eta,x,\xi,h)=\int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}}\int\exp\Big\{\frac{i}{h}\Big(\sum_{j=1}^{k}\eta_jp_j'-\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_jx_j'\Big)\Big\}L(\eta,x,p',\xi,h)$$
$$\times\exp\Big\{\frac{i}{h}S(p',x')\Big\}\varphi_\delta(p',x',h)\prod_{j=k+1}^{n+1}dx_j'\prod_{i=1}^{k}dp_i'\qquad(3.2)$$

$\varphi_\delta(p',x',h)$ の台を Ω とし，

$$\Omega_{\xi_j{}^0}=\frac{\partial S}{\partial x_j'}(\Omega),\qquad\Omega_{\eta_i{}^0}=-\frac{\partial S}{\partial p_i'}(\Omega)$$

$$j=k+1,\cdots,n+1,\qquad i=1,\cdots,k$$

とする[1]．$\Omega_0=\prod_{i,j}\Omega_{\eta_i 0}\times\Omega_{\xi_j 0}$ 上で 1 に等しい函数 $\Phi(\eta,\xi)\in C_0^\infty$ を選ぼう．

次の積分を考察する．

$$I_2(x,p,h)=\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int\prod_{j=k+1}^{n+1}d\xi_j\prod_{i=1}^{k}d\eta_i(1-\Phi(\eta,\xi))$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{h}\Big(\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_jx_j-\sum_{j=1}^{k}\eta_jp_j\Big)\right\}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int\exp\left\{\frac{i}{h}\sum_{j=1}^{k}\eta_jp_j'\right\}\right.$$
$$\times\exp\left\{-\frac{i}{h}\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_jx_j'\right\}L(\eta,x,p',\xi,h)$$
$$\left.\times\exp\left\{\frac{i}{h}S(p',x')\right\}\varphi_\delta(p',x',h)\prod_{j=k+1}^{n+1}dx_j'\prod_{j=1}^{k}dp_j'\right].$$

$\Phi(\eta,\xi)$ の定義から，$1-\Phi(\eta,\xi)\neq 0$ ならば，$\xi\neq\operatorname{grad}_{x'}S(p',x')$, $\eta\neq-\operatorname{grad}_{p'}S(p',x')$ が成り立つ．したがって，I_1 は $(\eta,\xi)\in\{1-\Phi(\eta,\xi)\neq 0\}$ に対して停留点をもたない．ゆえに，補題 6.7 より次式が成り立つ．

$$I(x,p,h)=I_3(x,p,h)+O(h^N),$$
$$I_3(x,p,h)=\frac{1}{(2\pi h)^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int\Phi(\eta,\xi)\exp\left\{\frac{i}{h}\Big(\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_jx_j-\sum_{i=1}^{k}\eta_ip_i\Big)\right\}$$
$$\times L(\eta,x,p',\xi,h)\exp\left\{\frac{i}{h}\Big(\sum_{j=1}^{k}\eta_jp_j'-\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_jx_j'\Big)\right\}\varphi_\delta(p',x',h)$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{h}S(p',x')\right\}\prod_{j=k+1}^{n+1}dx_j'd\xi_j\prod_{i=1}^{k}dp_i'd\eta_i.\tag{3.3}$$

ここで N は任意の自然数である．

われわれは停留位相の方法によって $I_3(x,p,h)$ を計算する．停留点：$\xi_j{}^0$, $x_j{}'^0$, $p_i{}'^0$, $\eta_i{}^0$ $(j=k+1,\cdots,n+1,i=1,\cdots,k)$ は次の方程式系の解である．

$$x_j{}'^0=x_j,\qquad \frac{\partial S}{\partial x_j{}'^0}(p'^0,x'^0)=\xi_j{}^0,\qquad (j=k+1,\cdots,n+1)$$
$$\frac{\partial S}{\partial p_i}(p'^0,x'^0)=-\eta_i{}^0,\qquad p_i{}'^0=p_i,\qquad (i=1,\cdots,k).$$

この方程式系は明らかに唯一つの解を持つ．すなわち，

1)　すなわち，$\Omega_{\xi_j 0}$ は函数：$(\partial S/\partial x_j{}')(x')(x'\in\Omega)$ の値域である．

$$\begin{cases} \xi_j{}^0 = \dfrac{\partial S}{\partial x_j}(p,x), & \\ x_j{}'^0 = x_j & (j=k+1,\cdots,n+1) \\ \eta_i{}^0 = -\dfrac{\partial S}{\partial p_i}(p,x), & \\ p_i{}'^0 = p_i. & (i=1,\cdots,k) \end{cases}$$

この点において，行列式

$$\det\begin{Vmatrix} 0 & -\|\delta_{ij}\| & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} \\ -\|\delta_{ij}\| & \left\|\dfrac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(p,x)\right\| & & \\ \multicolumn{2}{c}{\mathbf{0}} & \left\|\dfrac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}\right\| & \|\delta_{ij}\| \\ & & \|\delta_{ij}\| & 0 \end{Vmatrix} = 1$$

であるから，$I_3(x,p,h)$ に対して停留位相の方法が適用できる．さて $I_3(x,p,h)$ に停留位相の方法を適用し，さらに $I(x,p,h)=I_3(x,p,h)+O(h^N)$ を考慮すれば，われわれは次式を得る．

$$\begin{aligned} I(x,p,h) = \exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}\Big\{ & L(\eta^0,x,p,\xi^0,0)\varphi_\delta(p,x,h) \\ & +ih\Big[a_0L(\eta^0,x,p,\xi^0,0)+\sum_{j=1}^{k}a_j\frac{\partial L^0}{\partial \eta_j{}^0}+\sum_{j=k+1}^{n+1}b_j\frac{\partial L^0}{\partial \xi_j{}^0} \\ & \quad +\sum_{i=1}^{k}c_i\frac{\partial L^0}{\partial p_i}+\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i{}^0\partial \eta_j{}^0}+\sum_{i,j=k+1}^{n+1}b_{ij}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i{}^0\partial \xi_j{}^0} \\ & \quad +\sum_{i,j=1}^{k}c_{ij}\frac{\partial^2 L^0}{\partial p_i\partial p_j}+\sum_{i,j=1}^{k}d_{ij}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i{}^0\partial p_j} \\ & \quad +\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}e_{ij}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i{}^0\partial \xi_j{}^0}+\sum_{j=k+1}^{n+1}\sum_{i=1}^{k}f_{ij}\frac{\partial^2 L^0}{\partial p_i\partial \xi_j{}^0} \\ & \quad -i\frac{\partial L}{\partial h}(\eta^0,x,p,\xi^0,h)\Big|_{h=0}\varphi_\delta(x,p,h)\Big] \\ & +\sum_{i=2}^{N}h^iP_i(x,\hat{\xi},p,\hat{\eta})\varphi_\delta(p,x,h)+h^{N+1}z_h(p,x,h)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで，$L^0=L(\eta^0,x,p,\xi^0,0)$, $\eta_i{}^0=-\partial S/\partial p_i$, $\xi_j{}^0=\partial S/\partial x_j$ $(i=1,\cdots k,\ j=k+1,\cdots,n+1)$, $P_i(x,\hat{\xi},p,\hat{\eta})$ は $\hat{\xi},\hat{\eta}$ に関して $2i$ 次の多項式，$a_i, b_i, c_i, a_{ij}, b_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}$ は p と x による係数．これらの係数は L に依らないことに注意してそれらを決定しよう．

$\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h)=c_0=\text{const}$ とすれば,

$$I(x,p,h) = c_0 \exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}\varphi_\delta(p,x,h).$$

したがって，(3.4) より $a_0=0$. 次に，$\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h)=\hat{\eta}_i+\hat{\xi}_j+p_\nu$ とおいて

$$I(x,p,h) = \left[ih\left(\frac{\partial}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+p_\nu\right]\exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}\varphi_\delta(p,x,h)$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}\left[p_\nu\varphi_\delta+\varphi_\delta\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}-\frac{\partial S}{\partial p_i}\right)+ih\left(\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_j}\right)\right].$$

一方,

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\hat{\xi}_i}=\delta_{ij}, \qquad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\hat{\eta}_j}=\delta_{ij}, \qquad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial p_j}=\delta_{\nu j}$$

であるから,

$$a_j = \frac{\partial\varphi_\delta}{\partial p_j}, \qquad (j=1,\cdots,k), \tag{3.5}$$

$$b_j = -\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_j}, \qquad (j=k+1,\cdots,n+1), \tag{3.6}$$

$$c_j = 0, \qquad (j=1,\cdots k). \tag{3.7}$$

次に，$\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h)=\hat{\eta}_i\hat{\eta}_j+\hat{\xi}_l\hat{\xi}_m$ とおいて,

$$I(x,p,h) = -h^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_l}+\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j}\right)\exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}\varphi_\delta(p,x,h)$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}\left[\frac{\partial S}{\partial x_l}\frac{\partial S}{\partial x_m}\varphi_\delta+\frac{\partial S}{\partial p_i}\frac{\partial S}{\partial p_j}\varphi_\delta\right. \\ &\quad -ih\left(\frac{\partial S}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_m}+\frac{\partial S}{\partial x_m}\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_l}\right) \\ &\quad -ih\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_m\partial x_l}+\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial p_j}\right)\varphi_\delta \\ &\quad \left.-h^2\left(\frac{\partial^2\varphi_\delta}{\partial x_m\partial x_l}+\frac{\partial^2\varphi_\delta}{\partial p_i\partial p_j}\right)-ih\left(\frac{\partial S}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial p_j}+\frac{\partial S}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi_\delta}{\partial p_i}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.4) および (3.8) から次式を得る.

$$a_{ij}+a_{ji} = -\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial p_j}\varphi_\delta, \tag{3.9}$$

$$b_{ij}+b_{ji} = -\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}\varphi_\delta. \tag{3.10}$$

(3.9), (3.10) を (3.4) に代入して,

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i{}^0 \partial \eta_j{}^0} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i{}^0 \partial \eta_j{}^0}, \tag{3.11}$$

$$\sum_{i,j=k+1}^{n+1} b_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i{}^0 \partial \xi_j{}^0} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i{}^0 \partial \xi_j{}^0} \tag{3.12}$$

を得る.

d_{ij}, c_{ij} を求めるために, $\tilde{L}=p_i p_j+\hat{\eta}_m p_l$ とおくと,

$$\begin{aligned} I(x,p,h) &= \left(ih\frac{\partial}{\partial p_m} p_l + p_i p_j\right) \exp\left\{\frac{i}{h} S(p,x)\right\} \varphi_\delta(p,x,h) \\ &= p_i p_j \exp\left\{\frac{i}{h} S(p,x)\right\} \varphi_\delta(p,x,h) \\ &\quad + \exp\left\{\frac{i}{h} S(p,x)\right\} \left(ih\delta_{ml}\varphi_\delta - p_l \frac{\partial S}{\partial p_m} \varphi_\delta + ihp_l \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_m}\right). \end{aligned}$$

一方, $\partial^2 \tilde{L}(\eta,x,p,\xi,h)/\partial \eta_i \partial p_j = \delta_{mi}\delta_{lj}$ であるから, (3.4) より

$$\sum_{i,j=1}^{k} d_{ij} \delta_{mi} \delta_{lj} = \delta_{ml} \varphi_\delta \tag{3.13}$$

が得られる. ゆえに, $d_{ml}=\delta_{ml}\varphi_\delta$, $c_{ij}=0$.

$\tilde{L}=\hat{\eta}_l \hat{\xi}_m + p_\nu \hat{\xi}_l$ とおいて,

$$\begin{aligned} I(x,p,h) &= h^2 \frac{\partial^2}{\partial p_l \partial x_m} \exp\left\{\frac{i}{h} S(p,x)\right\} \varphi_\delta(p,x,h) \\ &\quad - ihp_\nu \frac{\partial}{\partial x_l} \exp\left\{\frac{i}{h} S(p,x)\right\} \varphi_\delta(p,x,h) \\ &= \exp\left\{\frac{i}{h} S(p,x)\right\} \left[-\frac{\partial S}{\partial x_m} \frac{\partial S}{\partial p_l} \varphi_\delta \right. \\ &\quad + ih\left(\frac{\partial S}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_l} + \frac{\partial S}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_m}\right) + ih \frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial x_m} \varphi_\delta \\ &\quad \left. + h^2 \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial p_l \partial x_m} - ihp_\nu \left(\frac{i}{h} \frac{\partial S}{\partial x_l} \varphi_\delta + \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x_l}\right) \right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

したがって, (3.4) から,

$$e_{lm} = \frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial x_m}, \qquad f_{ij} = 0 \tag{3.15}$$

を得る.

(3.5), (3.7), (3.9), (3.13), (3.15) より, $0 \leqq x_{n+1} \leqq a$ において次の等式が成り立つ.

$$\tilde{L}\psi_\delta=\tilde{L}\psi=\tilde{L}\exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}\varphi(p,x,h)$$

$$=\frac{1}{(2\pi ih)^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\!\int\prod_{j=k+1}^{n+1}d\xi_j\prod_{i=1}^{k}d\eta_i\exp\left\{\frac{i}{h}\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_jx_j\right\}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{i}{h}\sum_{j=1}^{k}\eta_jp_j\right\}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\!\int\exp\left\{\frac{i}{h}\left(\sum_{j=1}^{k}\eta_jp_j'-\sum_{j=k+1}^{n+1}\xi_jx_j'\right)\right\}\right.$$

$$\left.\times L(\eta,x,p',\xi,h)\exp\left\{\frac{i}{h}S(p',x')\right\}\varphi_\delta(p',x',h)\prod_{j=k+1}^{n+1}dx_j'\prod_{i=1}^{k}dp_i'\right]$$

$$=\exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}\left\{L^0\varphi+ih\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L^0}{\partial\eta_j{}^0}\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}-\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial L^0}{\partial\xi_j{}^0}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2S}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial^2L^0}{\partial\eta_i{}^0\partial\eta_j{}^0}+\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2S}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2L^0}{\partial\xi_i{}^0\partial\xi_j{}^0}\right.$$

$$\left.-2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2S}{\partial p_i\partial x_j}\frac{\partial^2L^0}{\partial\eta_i{}^0\partial\xi_j{}^0}-2\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2L^0}{\partial\eta_i{}^0\partial p_i}\right)\varphi$$

$$\left.-i\frac{\partial L}{\partial h}(\eta^0,x,p,\xi^0,h)\Big|_{h=0}\varphi\right]_{\substack{\eta^0=-\mathrm{grad}_pS(p,x)\\ \xi^0=\mathrm{grad}_xS(p,x)}}$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{N}h^iP_i\left(x,\frac{\partial}{\partial p},p,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi+h^{N+1}z_h(p,x,h)\right\}. \tag{3.16}$$

$\Phi^{p_1\cdots p_k}$ は R_h を R_h に移すから，等式

$$\hat{L}(\eta,x,\hat{p},\hat{\xi},h)\Phi^{p_1\cdots p_k}\psi(x,p,h)=\Phi^{p_1\cdots p_k}\tilde{L}\psi$$

より補題の主張が得られる. （証明終り.）

3° スカラーの場合

可算ノルム空間 R_h で，作用素 $\hat{L}(\hat{p}_1,\cdots,\hat{p}_{n+1},x_1,\cdots,x_{n+1},h)$ を研究しよう. ここで，

$$\hat{L}(\hat{p}_1,\cdots,\hat{p}_{n+1},x_1,\cdots,x_{n+1},h)=\sum_{k=0}^{m}\hat{L}_k(\hat{p}_1,\cdots,\hat{p}_n,x_1,\cdots,x_{n+1},h)\hat{p}_{n+1}{}^k,$$

$$\hat{L}_m\equiv1,\qquad \hat{p}_j=-ih\partial/\partial x_j,\qquad (j=1,\cdots n),$$

$$\hat{p}_{n+1}=ih\,\partial/\partial x_{n+1},\qquad x_{n+1}=t$$

であった. なお $\hat{p}_j$ は最初に作用する. すなわち，

$$\hat{L}_k(\hat{p}_1,\cdots,\hat{p}_n,x_1,\cdots,x_{n+1},h)\psi(x_1,\cdots,x_n)$$

$$=\Phi^{p_1\cdots p_n}L_k(p_1,\cdots,p_n,x_1,\cdots,x_{n+1},h)\Phi^{\xi_1\cdots\xi_n}\psi(\xi_1,\cdots,\xi_n).$$

われわれは次の仮定をおく：作用素

$$L(p_1, \cdots, p_{n+1}, x_1, \cdots, x_{n+1}, 0) \tag{3.16 a}$$

は B^1 において定数である(もちろん，$x_1, \cdots, x_{n+1}, p_1, \cdots, p_{n+1}$ には依存する)，(すなわち，(3.16 a)の固有値は無限多重度をもつ).

以前の表記法にもどって，$L(p_1, \cdots, p_{n+1}, x_1, \cdots, x_{n+1}, h)$ を $L(\eta, x, p, \xi, h)$，$\eta=(\eta_1, \cdots, \eta_k)\equiv(x_1, \cdots, x_k)$，$\xi=(\xi_{k+1}, \cdots, \xi_{n+1})\equiv(p_{k+1}, \cdots, p_{n+1})$ と表わそう．作用素(3.16 a)を L^0 と表わす[1]．したがって，$L^0(\eta, x, p, \xi)$ は，$\xi_{n+1}=p_{n+1}$ に関して次数 m の多項式である．次の条件1), 2), 3)を仮定する.

1)　多項式 $L^0(\eta, x, p, \xi)$ は実単根 $\xi_{n+1}=p_{n+1}=\lambda(p_1, \cdots, p_n, x_1, \cdots, x_n, t)$[2] をもつ．したがって，

$$\frac{\partial L^0}{\partial \lambda} = \left.\frac{\partial L^0}{\partial p_{n+1}}\right|_{p_{n+1}=\lambda(p,x,t)} \neq 0.$$

2)　作用素 $L(p_1, \cdots, p_{n+1}, x_1, \cdots, x_n, t, h)$ およびその任意の導函数，かつ作用素 $\exp\{it\,\partial L/\partial h\}_{h=0}$ は B^∞ を B^∞ に移す.

3)　§3-1° の条件1)が満たされる.

これらの仮定のもとで，十分小さな t に対して，次の方程式系の解 $s(t)=s(x_0, p_0, t)$，$p(t)=p(x_0, p_0, t)$，$x(t)=x(x_0, p_0, t)$, $x_0=(x_{0k+1}, \cdots, x_{0n})$, $p_0=(p_{01}, \cdots, p_{0k})$ が存在する.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\dfrac{\partial\lambda}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_i}, \qquad (i=1, \cdots, n) \\ \dot{s} = \lambda - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\lambda}{\partial p_i} p_i, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} s(0) = s^0(p_{01}, \cdots, p_{0k}, x_{0k+1}, \cdots, x_{0n}) \\ p_i(0) = p_{0i}, (i=1, \cdots, k); \quad x_j(0) = x_{0j}, (j=k+1, \cdots n), \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} x_i(0) = -\dfrac{\partial s^0}{\partial p_{0i}} = x_{0i}(p_{01}, \cdots, p_{0k}, x_{0k+1}, \cdots, x_{0n}), \\ \quad (i=1, \cdots, k) \\ p_j(0) = \dfrac{\partial s^0}{\partial x_{0j}} = p_{0j}(p_{01}, \cdots, p_{0k}, x_{0k+1}, \cdots, x_{0n}), \\ \quad (j=k+1, \cdots, n). \end{cases} \tag{3.19}$$

ここで，初期値は Lagrange 多様体の $\tilde{\Omega}_k$ 型の局所地図に対応している.

1)　第4章§1の記号では，$L^0=L_0\equiv L_0{}^*=\lambda(\eta, x, p, \xi)$.

2)　第4章§1の記号では，根 $p_{n+1}=H(p, x, t)$.

十分小さな時間 t に対して明らかに次の方程式(*)の解:

$$p_{0i} = p_{0i}(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_n, t), \quad (i=1, \cdots, k),$$
$$x_{0j} = x_{0j}(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_n, t), \quad (j=k+1, \cdots, n)$$

が一意に存在する.

$$(*)\begin{cases} p_i(p_{01}, \cdots, p_{0k}, x_{0k+1}, \cdots, x_{0n}, t) = p_i, & (i=1, \cdots, k), \\ x_j(p_{01}, \cdots, p_{0k}, x_{0k+1}, \cdots, x_{0n}, t) = x_j, & (j=k+1, \cdots, n). \end{cases}$$

補題 6.13 の記号を保って,

$$S(p, x) = \tilde{S}(x_0, p_0, t),$$
$$x_0 = x_0(x, p, t), \quad p_0 = p_0(x, p, t)$$

と表わそう. よく知られているように, Hamilton–Jacobi の理論によって, 方程式系(3.17)–(3.19)の解は次の方程式を満たす.

$$\frac{dx_j}{d\tau} = \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j{}^0}(\eta^0, x, p, \xi^0), \quad (j=k+1, \cdots, n+1).$$

ここで,

$$\eta_i{}^0 = -\frac{\partial S}{\partial p_i}, \quad \xi_j{}^0 = \frac{\partial S}{\partial x_j}, \quad (i=1, \cdots k, j=k+1, \cdots, n+1).$$

したがって次の等式が成り立つ.

$$-\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial L^0}{\partial \eta_i{}^0} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial L^0}{\partial \xi_j} = \frac{d\varphi}{d\tau}. \tag{3.20}$$

さて, 公式(3.1)の右辺の $\Phi^{p_1 \cdots p_k}$ が作用している部分を構成している作用素を R で表わすならば, 公式(3.1)は次のように書き表わされる.

$$L\Phi^{p_1 \cdots p_k}\psi = \Phi^{p_1 \cdots p_k} e^{\frac{i}{h}S} R\psi + h^{N+1} z_h. \tag{3.21}$$

置換:

$$\varphi = \frac{u}{\sqrt{J}}, \quad J = \frac{D(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_n, t)}{D(p_{01}, \cdots, p_{0k}, x_{0k+1}, \cdots, x_{0n}, \tau)}$$

を行なえば,

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{J}}\left(\frac{du}{d\tau} - \frac{1}{2}u\frac{d}{d\tau}\ln J\right)$$

を得る.

С. Л. Соболев[1] (第5章§5, 補足 A を参照せよ)の定理により,

$$\frac{d}{d\tau}\ln J = -\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial L^0}{\partial \eta_i{}^0}(\eta^0, x, p, \xi^0)\right\} + \sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial L^0}{\partial \xi_j{}^0}(\eta^0, x, p, \xi^0)\right\}$$
$$= -\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i{}^0 \partial p_i} + \sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i{}^0 \partial \eta_j{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}$$
$$+ \sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i{}^0 \partial \xi_j{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i{}^0 \partial \xi_j{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j}$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial \xi_j{}^0}. \tag{3.22}$$

したがって，

$$R\varphi = \tilde{R}u = \frac{h}{\sqrt{J}}\left(-i\frac{du}{d\tau} + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial p_j}u + \left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}u\right)$$
$$+ \sum_{i=2}^{N}h^i P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\right)\frac{u}{\sqrt{J}} = -i\frac{h}{\sqrt{J}}(Au + hBu).$$

ここで，$L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) = 0$ を用いた.

次に，作用素

$$\tilde{R}u = -i\frac{h}{\sqrt{J}}(Au + hBu) \tag{3.23}$$

を研究しよう．ここで，

$$A = \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial p_j} + i\left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0},$$
$$B = i\sum_{j=0}^{N-2}h^j\sqrt{J}\,P_{j+2}\left(x, \frac{\partial}{\partial p}, p, \frac{\partial}{\partial x}\right)\circ\frac{1}{\sqrt{J}}.$$

$\tau = 0$ で 0 になる函数の集合に A を制限したものを $\tilde{A}$ とするならば，明らかに $\tilde{A}^{-1}$ が存在する.

$P_i(x, \partial/\partial x, p, \partial/\partial p)$ は L の p, x, h に関する導函数の線型結合であり，各導函数は B^∞ を B^∞ に移すから，$P_i(x, \partial/\partial x, p, \partial/\partial p)$ もまた B^∞ を B^∞ に移す．明らかに，$f(x) \in R_h$ が R_h で無限回微分可能ならば，$P_i(x, \partial/\partial x, p, \partial/\partial p)f(x)$ も R_h で無限回微分可能である．さらに，$\exp\left\{i\left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}t\right\}$ は，B^∞ を B^∞ に移すから，次の方程式

$$\begin{cases} Av(t) = 0 \\ v|_{t=0} = v_0 \in R_h \end{cases} \tag{3.24}$$

の解 $v(t)$ は，v_0 が R_h で無限回微分可能ならば R_h で無限回微分可能である．この注意は $\tilde{A}^{-1}$ に対しても成り立つ．したがって，$(\tilde{A}^{-1}B)^N v(t) \in R_h$ は任意の

Nに対してR_hで無限回微分可能である.

$v^i(t)$をR_hで無限回微分可能な初期値をもつ(3.24)の解とする. 補題5.5と同様にして, 函数

$$u_N=\sum_{n=0}^{N}(-h)^n\sum_{i=0}^{n}(\tilde{A}^{-1}B)^i v^{n-i}(t)$$

は, 方程式

$$Au_N+hBu_N=h^{N+1}\tilde{z}_h$$

を満たす. ここで, $\tilde{z}_h\in R_h$. したがって,

$$\begin{aligned}&\hat{L}\Phi^{p_1\cdots p_k}\frac{1}{\sqrt{J}}\exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}u_N\\&=-ih^{N+2}\Phi^{p_1\cdots p_k}\frac{1}{\sqrt{J}}\exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}\tilde{z}_h+h^{N+1}z_h(x,t,h)\\&=h^{N+1}\bar{z}_h(x,t),\qquad \bar{z}_h(x,t)\in R_h.\end{aligned}\tag{3.25}$$

ここで$\Phi^{p_1\cdots p_k}$がR_hをR_hに移すことを用いた. 仮定(1)により, 方程式

$$h^\tau\hat{L}w=\bar{z}_h(x,t,h)$$

の解$w\in V_h$が存在するから,

$$\hat{L}\left(\Phi^{p_1\cdots p_k}\frac{1}{\sqrt{J}}e^{\frac{i}{h}S}u_N-h^{N+1-\tau}w\right)=0\tag{3.26}$$

が成り立つ. ここでNは任意に大きくできるから次の定理を得る.

定理6.1 前に述べた仮定のもとで, 方程式 : $L\psi(x,t)=0$の解で次のように表わされるものが存在する.

$$\begin{aligned}\psi(x,t)=\Phi^{p_1\cdots p_k}&\left\{\frac{\exp\left\{\frac{i}{h}S(p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_n,t)\right\}\sqrt{\left.\frac{\partial L^0}{\partial\lambda}\right|_{t=0}}}{\sqrt{\frac{D(p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_n)}{D(p_{01},\cdots,p_{0k},x_{0k+1},\cdots,x_{0n})}}\sqrt{\frac{\partial L^0}{\partial\lambda}}}\right.\\&\times\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{\partial L^0}{\partial\lambda}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2L^0}{\partial x_j\partial p_j}-i\left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}\right)dt\right\}\\&\left.\times\sum_{j=0}^{N+\tau}h^j\varphi_j(p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_n,t)\right\}+h^{N+1}z_h(x,t,h).\end{aligned}$$

ここで$\partial L^0/\partial\lambda$, $\partial^2L^0/\partial x_j\partial p_j$, $\partial L/\partial h|_{h=0}$は, $x=x(x_0,p_0,t)$, $p=p(x_0,p_0,t)$の函数であり$S(p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_n,t)=\tilde{S}(x_0(p,x,t),\ p_0(p,x,t),t)$, $\varphi_j(p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_n,t)$は, 変数$p,x$に関してコンパクトな台をもつ$B^\infty$-値無限回微分

可能函数，$z_h \in R_h$，さらに f を任意の B^∞-値函数として，

$$\varphi_0(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_n, t) = f(p_{01}, \cdots, p_{0k}, x_{0k+1}, \cdots, x_{0n}).$$

4° 有限多重度の場合

さて，定理 4.1 の条件 1) を仮定しよう．その際 $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ は有限多重度とする．ここでは第4章§2の記号を用い，そこでの条件を仮定する．

基本等式　$\chi_1, \cdots, \chi_\tau$ を正規化された L^0 の固有ベクトル系

$$L|_{h=0}\chi_i = L^0\chi_i = \lambda\chi_i, \qquad (i = 1, \cdots, \tau), \tag{3.27}$$
$$\chi_i = \chi_i(x_1, \cdots, x_n, t, p_1, \cdots, p_{n+1}),$$
$$\lambda = \lambda(x_1, \cdots, x_n, t, p_1, \cdots, p_{n+1});$$

$\chi_1^\dagger, \cdots, \chi_\tau^\dagger$ を作用素 $(L^0)^*$ の正規化された同じ固有値 $\lambda = \lambda(x_1, \cdots, x_n, t, p_1, \cdots, p_{n+1})$ に対応する固有ベクトル系

$$(L^0)^*\chi_i^\dagger = \lambda\chi_i^\dagger, \qquad (i = 1, \cdots, \tau) \tag{3.28}$$

とする．このとき，次の等式を示そう．

3. a)　$$\left(\chi_j^\dagger, \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu}\chi_i\right) = \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\delta_{ij},$$

b)　$$\left(\chi_j^\dagger, \frac{\partial L^0}{\partial x_\nu}\chi_i\right) = \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu}\delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} = (\chi_j^\dagger, \chi_i).$$

証明　(3.27) を p_ν で微分して，

$$\frac{\partial L^0}{\partial p_\nu}\chi_i + L^0\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\chi_i + \lambda\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu}. \tag{3.29}$$

この等式に $\chi_j^\dagger$ を掛けて (3.28) を用いれば 3. a) を得る．同様にして，

$$\frac{\partial L^0}{\partial x_\nu}\chi_i + L^0\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu}\chi_i + \lambda\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\nu}$$

から 3. b) を得る．

(3.29) を x_μ に関して微分して，

$$\frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial x_\mu}\chi_i + \frac{\partial L^0}{\partial x_\mu}\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} + \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu}\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\mu} + L^0\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial p_\nu \partial x_\mu}$$
$$= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial x_\mu}\chi_i + \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} + \lambda\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_\mu \partial p_\nu}.$$

この等式に $\chi_j^\dagger$ を左から掛けて，

$$4.\,a)\quad \left(\chi_j{}^\dagger, \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial x_\mu}\chi_i\right) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial x_\mu}\delta_{ij} + \left(\chi_j{}^\dagger, \left[\frac{\partial L^0}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu}\right) + \left(\chi_j{}^\dagger, \left[\frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\mu}\right) = 0$$

を得る．同様にして，

$$4.\,b)\quad \left(\chi_j{}^\dagger, \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial p_\mu}\chi_i\right) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial p_\mu}\delta_{ij} + \left(\chi_j{}^\dagger, \left[\frac{\partial L^0}{\partial p_\mu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\mu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu}\right) + \left(\chi_j{}^\dagger, \left[\frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\mu}\right) = 0.$$

前小節のように等式(3.1)の右辺に現われる作用素を R と表わそう．すなわち，

$$L\Phi^{p_1\cdots p_k}\psi = \Phi^{p_1\cdots p_k}\exp\left\{\frac{i}{h}S(p,x)\right\}R\varphi + h^{N+1}z_h(x,t).$$

このとき，R は次のように表わされる．

$$R = A + \sum_{i=1}^{N} h^i U_i,$$

$$A = L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) = L^0,$$

$$U_1 = i\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial L^0}{\partial \eta_j{}^0}\frac{\partial}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial L^0}{\partial \xi_j{}^0}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i{}^0 \partial \eta_j{}^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i{}^0 \partial \xi_j{}^0} - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i{}^0 \partial \xi_j{}^0} - 2\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i{}^0 \partial p_i}\right)\right\} + \left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}.$$

さて，χ を L^0 の固有ベクトル，$S(p,x)$ を Hamilton–Jacobi 方程式

$$\lambda\left(-\frac{\partial S}{\partial p}, x, p, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \tag{3.30}$$

の解とすれば，χ は方程式

$$A\chi = 0$$

を満たす．仮定によって，$\tilde{A} = A(1-P_\lambda)$ は逆をもち，

$$[A(1-P_\lambda)]^{-1}(1-P_\lambda{}^\dagger)$$

は B^∞ 全体で定義される．摂動論の補題 5.5(第 2 部)を適用して，方程式

$$R\varphi = h^{N+1}z_h$$

の解 φ を求めるためには，摂動論の最初の N 項が存在しなければならない．漸近展開の第1項を定義するためには，次の式

$$\tilde{A}^{-1}U_1\chi$$

が存在しなければならない．これは，$U_1\chi \in D(\tilde{A}^{-1})$，すなわち $P_\lambda^\dagger U_1\chi=0$ を意味する．まず L^0 の固有値 λ の重複度を1，すなわち $\tau=1$ と仮定しよう．このとき，条件は

$$(\chi^\dagger, U_1\chi) = 0 \tag{3.31}$$

と書ける．ここで内積は B_1 におけるものとする．$\chi=\chi_0\varphi_0$ ($\|\chi_0\|=1$，$\varphi_0=\varphi_0(p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1})$ はスカラー函数) と分解され，作用素 U_1 は変数 $p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1}$ に関する微分を含む R_h における作用素であるから，方程式 (3.31) は函数 φ_0 に対する微分方程式

$$(\chi_0^\dagger, U_1\chi_0)\varphi_0 = 0 \tag{3.31 a}$$

に書き直される．

固有値 λ が τ 重の場合も全く同様であり，方程式 (3.31 a) は $\chi_1,\cdots,\chi_\tau$ のスカラー係数 $\varphi_{01},\cdots,\varphi_{0\tau}$ に関する次の微分方程式系に書き直される．

$$\sum_{j=1}^{\tau}(\chi_i^\dagger, U_1\chi_j)\varphi_{0j} = 0, \qquad (i=1,\cdots,\tau).$$

ここで，φ_{0i} は (p,x) の函数ではあるが複素数値函数であり，$\chi_1,\cdots,\chi_\tau$ は B_1 でのノルムが1に正規化されたベクトル値函数であることを，再度思い起こそう．

補題5.5によって次の項を算出するためには，

$$U_1\Bigl(\tilde{A}^{-1}U_1\sum_{j=1}^{\tau}\varphi_{0j}\chi_j+\sum_{j=1}^{\tau}\varphi_{1j}\chi_j\Bigr)+U_2\sum_{j=1}^{\tau}\varphi_{0j}\chi_j$$

が $\tilde{A}^{-1}$ の定義域に属していなければならない．すなわち，

$$P_\lambda^\dagger\Bigl\{U_1\Bigl[\tilde{A}^{-1}U_1\sum_{j=1}^{\tau}\varphi_{0j}\chi_j+\sum_{j=1}^{\tau}\varphi_{1j}\chi_j\Bigr]+U_2\sum_{j=1}^{\tau}\varphi_{0j}\chi_j\Bigr\}=0.$$

したがって，

$$\sum_{j=1}^{\tau}(\chi_i^\dagger, U_1\chi_j)\varphi_{1j} = -\Bigl(\chi_i^\dagger, [U_1\tilde{A}^{-1}U_1+U_2]\sum_{j=1}^{\tau}\varphi_{0j}\chi_j\Bigr).$$

かくして，$\varphi_{1j}=\varphi_{1j}(p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1})$ を決定するための方程式系が得られた．同様にして，k 番目の項

$$f_k = x_k + \tilde{A}^{-1}\sum_{j=1}^{k} U_j f_{k-j}$$

を算出するためには，

$$\sum_{i=1}^{k+1} U_i f_{k+1-i} \in D(\tilde{A}^{-1})$$

を必要とするはずである．したがって，われわれは $\varphi_{kj}=\varphi_{kj}(p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1})$ に対する方程式

$$\sum_{j=1}^{\tau}(\chi_i{}^{\dagger}, U_1\chi_j)\varphi_{kj} = F \tag{3.32}$$

を得る．ここで F は $\varphi_{ij}(i<k)$ にのみ依存する．したがって，問題は微分作用素 $L=(\chi_i{}^{\dagger}, U_1\chi_j)$ を求め，方程式

$$L\varphi = 0 \quad \text{および} \quad L\varphi = F, \qquad \varphi \in C^\infty, F \in C^\infty \tag{3.33}$$

を解くことに帰着される．

作用素 U_1 は次の形の和からなることに注意しよう．

$$U_1 = i\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial L^0}{\partial \eta_\nu{}^0}\frac{\partial}{\partial p_\nu} - i\sum_{\mu=k+1}^{n+1}\frac{\partial L^0}{\partial \xi_\mu{}^0}\frac{\partial}{\partial x_\mu} + R_1.$$

ここで R_1 は微分演算を含まない B^∞ での作用素であり，パラメーター $p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1}$ に依存する．したがって，

$$\sum_{\alpha=1}^{\tau}(\chi_\beta{}^{\dagger}, U_1\chi_\alpha)\varphi_{l\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{\tau} i\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\left(\chi_\beta{}^{\dagger}, \frac{\partial L^0}{\partial \eta_\nu{}^0}\chi_\alpha\right)\frac{\partial \varphi_{l\alpha}}{\partial p_\nu} - \sum_{\mu=k+1}^{n+1}\left(\chi_\beta{}^{\dagger}, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_\mu{}^0}\chi_\alpha\right)\frac{\partial \varphi_{l\alpha}}{\partial x_\mu}\right\} + \sum_{i=1}^{\tau} a_{i\beta}\varphi_{li}.$$

ここで，$a_{i\beta}$ はパラメーター $p_1,\cdots,p_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1}$ に依存する既知函数である．

等式 3) によって，

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{\tau}(\chi_\beta{}^{\dagger}, U_1\chi_\alpha)\varphi_{l\alpha} &= i\left(\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\lambda}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\varphi_{l\beta} - \sum_{\nu=k+1}^{n+1}\frac{\partial\lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varphi_{l\beta}\right) + \sum_{i=1}^{\tau} a_{i\beta}\varphi_{li} \\ &= -i\frac{d\varphi_{l\beta}}{d\tau} + \sum_{i=1}^{\tau} a_{i\beta}\varphi_{li}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

ここで，$d/d\tau$ は Hamilton 系(3.30)の軌道に沿っての微分である．このことから方程式(3.32)，(3.33)の解の存在が得られる．さらに，(3.25)，(3.26)の考察を適用することにより，方程式

$$\hat{L}\psi = 0$$

の解の漸近形に到達する．しかしながら，われわれは(3.33)の解をさらに具体

的に求めねばならない．すなわち，(3.34)の行列 a_{ip} を書きくだす必要がある．そのために等式3)-4)を用いよう．まず第1に次の等式に注意しよう．

$$(\chi_\nu^\dagger, U_1\chi_\mu) = -i\delta_{\mu\nu}\frac{d}{d\tau} + i\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\chi_\nu^\dagger, \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j{}^0}\frac{\delta\chi_\mu}{\delta p_j}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_{j=k+1}^{n+1}\left(\chi_\nu^\dagger, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j{}^0}\frac{\delta\chi_\mu}{\delta x_j}\right)\right\} + R_2, \qquad (3.35)$$
$$R_2 = (\chi_\nu^\dagger, R_1\chi_\mu).$$

ここで，$\delta/\delta p_j$ および $\delta/\delta x_j$ は $p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}$ に関する完全偏微分を表わす：

$$\frac{\delta\chi_\mu}{\delta p_j} = \frac{\partial\chi_\mu}{\partial p_j} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta_\nu{}^0}\frac{\partial\eta_\nu{}^0}{\partial p_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i{}^0}\frac{\partial\xi_i{}^0}{\partial p_j}$$
$$= \frac{\partial\chi_\mu}{\partial p_j} - \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta_\nu{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_\nu\partial p_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial p_j}, \qquad (j=1, \cdots, k);$$
$$\frac{\delta\chi_\mu}{\delta x_j} = \frac{\partial\chi_\mu}{\partial x_j} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta_\nu{}^0}\frac{\partial\eta_\nu{}^0}{\partial x_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i{}^0}\frac{\partial\xi_i{}^0}{\partial x_j}$$
$$= \frac{\partial\chi_\mu}{\partial x_j} - \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta_\nu{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_\nu\partial x_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j},$$
$$(j=k+1, \cdots, n+1, \qquad x_{n+1}=t).$$

前小節で行なったのと同様にして，

$$\varphi_{0j} = \frac{u_j}{\sqrt{J}}, \qquad J(p, x, t) = \frac{D(p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_n, t)}{D(p_{01}, \cdots, p_{0k}, x_{0k+1}, \cdots, x_{0n}, \tau)}$$

とおこう．($p_1, \cdots, p_k, x_{k+1}, \cdots, x_n, t$ は Hamilton 方程式系

$$\dot{p} = -\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \qquad \dot{x} = \frac{\partial\lambda}{\partial p}, \qquad \dot{t} = \frac{\partial\lambda}{\partial p_{n+1}}$$

の解である．ただし，$t(0)=0$，かつ p, x は初期条件(3.18)(3.19)を満たす．)
Соболев の定理(Смирнов[1]第5章§5，補足Aを参照せよ)によって，

$$\frac{d}{d\tau}\ln J = -\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta_i{}^0\partial p_i} + \sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta_i{}^0\partial\eta_j{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial p_j}$$
$$+ \sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i{}^0\partial\xi_j{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j} - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta_i{}^0\partial\xi_j{}^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\partial x_j}$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j\partial\xi_j{}^0}.$$

作用素 U_1 に関する(3.35)式に，

$$\frac{d\varphi_{0j}}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{J}}\left(\frac{du_j}{d\tau}-\frac{1}{2}u_j\frac{d}{d\tau}\ln J\right)$$

を代入し，等式 4. a), 4. b) より得られる次の等式

$$\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\left\{\left(\chi_\nu{}^\dagger,\ \frac{\partial^2 L^0}{\partial\xi_i{}^0\partial\xi_j{}^0}\chi_\mu\right)-\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i{}^0\partial\xi_j{}^0}\delta_{\mu\nu}\right\}$$

$$=\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\left\{\left(\chi_\nu{}^\dagger,\ \left[\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i{}^0}-\frac{\partial L^0}{\partial\xi_i{}^0}\right]\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_j{}^0}\right)+\left(\chi_\nu{}^\dagger,\ \left[\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j{}^0}-\frac{\partial L^0}{\partial\xi_j{}^0}\right]\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i{}^0}\right)\right\}$$

$$=2\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\left[\left(\chi_\nu{}^\dagger,\ \dot{x}_i\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_j{}^0}\right)-\left(\chi_\mu{}^\dagger,\ \frac{\partial L^0}{\partial\xi_i{}^0}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_j{}^0}\right)\right],$$

および等式

$$\dot{x}_i\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}=\dot{x}_i\frac{\partial\xi_j{}^0}{\partial x_i}$$

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}=\frac{d\xi_j{}^0}{d\tau}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\xi_j{}^0}{\partial p_i}\dot{p}_i+\sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\xi_j{}^0}{\partial x_i}\dot{x}_i$$

を考慮すれば，われわれは $u=(u_1,\cdots,u_\tau)$ に対する次の方程式

$$\frac{du}{d\tau}+Gu=0$$

を得る．ここで，

$$G=\left\|\left(\chi_\nu{}^\dagger,\ \frac{d\chi_\mu}{d\tau}\right)+\sum_{i=1}^{n+1}\left(\chi_\nu{}^\dagger,\ \left(\frac{\partial L^0}{\partial p_i}-\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\right)\frac{\partial\chi_\mu}{\partial x_i}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial p_i\partial x_i}\delta_{\mu\nu}+i\left(\chi_\nu{}^\dagger,\ \frac{\partial L}{\partial h}\chi_\mu\right)_{h=0}\right\|. \tag{3.36}$$

すなわち，作用素 $\sqrt{J}(\chi_\nu{}^\dagger,\ U_1\chi_\mu)\dfrac{1}{\sqrt{J}}$ は

$$\frac{d}{d\tau}+G$$

なる形に表わされる．以上の考察からわれわれは次の定理を得る．

定理 6.2　上に述べた仮定のもとで方程式：$\hat{L}\psi=0$ の解で，次のように表示されるものが存在する．

$$\psi(x,t)=\Phi^{p_1,\cdots,p_k}\left[\frac{\exp\left\{\dfrac{i}{h}S(p,x,t)\right\}}{\sqrt{J(p,x,t)}}\sum_{\nu=1}^{\tau}\sum_{j=0}^{N}h^j\varphi_{j\nu}(p,x,t)\chi_\nu(p,\xi^0,\eta^0,x,t)\right]$$
$$+h^{N+1}z_h(x,t,h). \tag{3.37}$$

ここで，$\varphi_{j\nu}(p,x,t)$ は p,x に関して有界な台を持つ無限回微分可能な B^∞-値函数，$z_h\in R_h$，$S(p,x,t)$ は方程式(3.30)を満たす実数値函数．$d/d\tau$ を(3.30)に対応する Hamilton 方程式系の軌道に沿う微分として，$\varphi_{0\nu}(p,x,t)$ は方程式

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau}+G\varphi_0=0, \qquad \varphi_0=(\varphi_{01},\cdots,\varphi_{0r})$$

を満たす．

第7章　抽象的方程式の解の大域的漸近形

この章では第2-4章において定式化した諸定理の証明を与える．その際原則として定理の内容は繰返さないことにする．

§1　局所座標に関する補題

まず始めに正準作用素の構成の際用いられた局所座標に関する補題(補題2.1)を証明する．この補題の主張は次の二つの補題7.1aと7.1bとに分けられる．

補題 7.1 a　点 $\alpha=\alpha^0$ において行列 $B=\|\partial q_i/\partial\alpha_j\|_{i,j\leq n}$ の階数 $r<n$ とする．このとき $n\times n$ 直交行列 $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$ を適当にとれば正準変換

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i(\alpha)&=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(\alpha^0)q_j(\alpha)\\ \tilde{p}_i(\alpha)&=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(\alpha^0)p_j(\alpha)\end{aligned}\tag{1.1}$$

の結果，等式

$$\frac{\partial\tilde{q}_\sigma}{\partial\alpha_j}(\alpha^0)=0$$

が各 $1\leqq\sigma\leqq k, 1\leqq j\leqq n$ に対し成り立つ．ここに $k=n-r$.

証明　直交行列 $C_1=C_1(\alpha^0)$，$C_2=C_2(\alpha^0)$ を適当に選んで行列 $B_1=C_1BC_2$ が $\alpha=\alpha^0$ において対角型となるようにできる(Гантмахер[1])．このとき最初の k 行は0からなるとしよう．明らかに行列 $B_2=B_1C_2^{-1}=C_1B$ の最初の k 行も0に等しい．

$C_1=C_1(\alpha^0)$ が求める直交行列 $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$ であることを示そう．$\tilde{q}(\alpha)=C_1q(\alpha)$ とおけば

$$\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\alpha}=C_1\frac{\partial q}{\partial\alpha}=C_1B=B_2$$

であるから，

$$\left(\frac{\partial\tilde{q}_\sigma}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=\alpha^0}=0,\qquad(\sigma=1,\cdots,k)$$

となる．変換(1.1)はLagrangeの括弧式を不変にするから補題は証明された．

補題 7.1 b　行列 $\|\partial\tilde{q}_i/\partial\alpha_j\|_{\alpha=\alpha^0}$ の階数を r とし $k=n-r$ とおく．$\sigma\leqq k$，$1\leqq j\leqq n$ に対し $\partial\tilde{q}_\sigma/\partial\alpha_j(\alpha^0)=0$ ならば行列 $\tilde{D}_k=\|\partial(\tilde{y}_k)_i/\partial\alpha_j\|_{i,j\leqq n}$ は非退化である．ここに

$$(\tilde{y}_k)_i=\begin{cases}\tilde{p}_i(\alpha) & (i\leqq k)\\ \tilde{q}_i(\alpha) & (i>k)\end{cases}\tag{1.2}$$

証明　B_2 に右から C_2 を掛けるのは座標 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ に $\tilde{\alpha}=C_2{}^*\alpha$ なる変換を施すのと同値である．ゆえに $B_1=B_2C_2=\|\partial\tilde{q}_i/\partial\tilde{\alpha}_j\|$．さて，行列 B_1 は $\alpha=\alpha^0$ において $i>k$ に対する項 $(\partial\tilde{q}_i/\partial\tilde{\alpha}_i)_{\alpha=\alpha^0}$ のみが0でないのだから，第1章の条件(2.2)から

$$\left(\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial\tilde{\alpha}_j}\right)_{\alpha=\alpha^0}=0\qquad(i>k\text{ かつ }j\leqq k\text{ のとき})\tag{1.3}$$

が得られる．

$\alpha=\alpha^0$ のとき $\det\|\partial\tilde{p}_i/\partial\tilde{\alpha}_j\|_{i,j\leqq k}\neq 0$ を示そう．もしこうでないとすれば(1.3)により長方行列 $A=\|\partial\tilde{p}_i/\partial\tilde{\alpha}_j\|_{\substack{i\leqq n\\ j\leqq k}}$ の $\alpha=\alpha^0$ における階数は k より小となる．長方行列 $\|\partial\tilde{q}_\sigma/\partial\tilde{\alpha}_j\|_{\alpha=\alpha^0,\substack{1\leqq\sigma\leqq n\\ 1\leqq j\leqq k}}$ は0に等しいから，結局長方行列

$$\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\tilde{q}_\sigma}{\partial\tilde{\alpha}_j}\\[2ex] \dfrac{\partial\tilde{p}_\sigma}{\partial\tilde{\alpha}_j}\end{matrix}\right\|_{\alpha=\alpha^0}=\begin{matrix} & k & r\\ n & O & *\\ n & A & *\end{matrix}$$

の階数は n より小となるが，これは $\{q(\alpha),p(\alpha)\}$ が n 次元多様体であることから不可能である．以上により

$$\det\tilde{D}_k\Big|_{\alpha=\alpha^0}=\prod_{i=k+1}^{r}\left(\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial\tilde{\alpha}_i}\right)_{\alpha=\alpha^0}\det\left\|\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial\tilde{\alpha}_j}\right\|_{i,j\leqq k}\Big|_{\alpha=\alpha^0}\neq 0$$

が得られた．

点 α^0 における座標で $\tilde{y}_k=\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\cdots,\tilde{q}_n\ (k=n-r)$ の形のものを点 α^0 の焦点座標とよび，対応する平面を焦点座標平面とよぶことにする．

§2　不変性の定理の証明

1.　以下，指数の4を法としての不変性を証明する．正準作用素の定義においてはこの知識だけで十分である．

ある領域 $\Omega\subset\Gamma$ が平面

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \cdots = \tilde{q}_{k_1} = \tilde{p}_{k_1+1} = \cdots = \tilde{p}_n = 0$$

に1対1に射影されるとき $\Omega \subset \tilde{\Omega}_k$ と書くことにする．またもしも同時に平面

$$\tilde{\tilde{q}}_1 = \tilde{\tilde{q}}_2 = \cdots = \tilde{\tilde{q}}_{k_2} = \tilde{\tilde{p}}_{k_2+1} = \cdots = \tilde{\tilde{p}}_n = 0$$

にも1対1に射影されるときには簡単に $\Omega \subset \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \Omega_{k_2}$ と記すことにする．点 α が被覆 $\mathscr{H}$ の地図 $\tilde{\Omega}_k$ に対応する元に属するとき $\alpha \in \tilde{\Omega}_k$ と書く．

点 $\alpha \in \tilde{\Omega}_k$ にはその平面 $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \cdots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \cdots = \tilde{p}_n = 0$ への射影 $\tilde{y}_k$ が1対1に対応するから，$\tilde{y}_k = \tilde{y}_k(\alpha)$, $\alpha = \alpha(\tilde{y}_k)$ と書くことができる．最後の函数は $\tilde{\Omega}_k$ に対応する領域の上述の平面への射影像 $\tilde{U}_k$ の上でのみ定義されている．

$$\tilde{J}_k = D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k, \qquad \tilde{\gamma}_k = \mathrm{Ind}\, \tilde{B}_k$$

とおこう[1)]．$S(\alpha)$ を方程式

$$\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha_j} = p \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha_j} \left[= \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right]$$

を満たすある函数とする[2)]．

$$\begin{aligned} \hat{I}_k &= \hat{I}_k(\tilde{y}_k) \\ &= [|\tilde{J}_k|^{1/2} \exp\{iA(S(\alpha) - \sum_{j=1}^{k} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\alpha))\} \varphi(\alpha)]_{\alpha = \alpha(\tilde{y}_k)} \end{aligned}$$

とおく[3)]．ここに $\varphi(\alpha)$ は台 $\Omega \subset \tilde{\Omega}_k$ を持つ滑らかな函数である．$\tilde{\tilde{\Omega}}_k$ に対応する同様の量は $\approx$ をつけて表わすことにする．$\Phi^{\tilde{q}_k}$ により Fourier 変換

$$\Phi^{\tilde{q}_k} \psi = \frac{e^{-i\pi k/4} A^{k/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int \exp\{-iA \sum_{j=1}^{k} \tilde{p}_j \tilde{q}_j\} \psi(\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_k) d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_k \quad (2.1)$$

を表わす．函数 $\psi(\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_k)$ の台が R ならば積分は R 上で行なわれなければならない．

不変性に関する三つの定理の証明のまえにいくつかの補題を用意する．以下補題7.2–7.5および定理2.3の証明中における等式はすべて商空間 S におけるもの(第2章§1–2°を見よ)と了解することとあらかじめ約束しておく．

補題 7.2 函数 $\varphi(\alpha)$ の台 Ω はコンパクトで，Lagrange 多様体 $\Gamma = \{q(\alpha),$

1)〔訳注〕 $\sigma(\alpha)$ は Γ 上の体積要素であった．この第1式は Jacobi 行列式にあたるものである．詳しくは第2章§2–2°を見よ．

2)〔訳注〕 積分可能条件(第1章(2.2))により $S(\alpha) = \int_{l[\alpha^0, \alpha]} p\,dq$ で定数を除き局所的に定まる．

3) 不変性定理の記述中におけると同様 A は Hilbert 空間 H 上の正定値非有界自己共役作用素，$\varphi(\alpha)$ は H に値をとる函数と仮定してある．定理2.4の証明においては Banach 空間 B 上の非有界作用素で第6章§1に述べた性質を持つものをとり扱うことも可能である．このとき $\varphi(\alpha)$ は対応する Banach 空間に値をとる函数となる．

$p(\alpha)\}$に含まれ，座標平面qおよび平面$\tilde{q}_1=\tilde{q}_2=\cdots=\tilde{q}_k=\tilde{p}_{k+1}=\cdots=\tilde{p}_n=0$に射影可能であるとし，その後者の平面への射影像を$\mho_k$とする．このとき

$$\Phi^{\tilde{q}_k}\hat{I}_0(\tilde{q})=\begin{cases}\tilde{I}_k\exp\left\{-\dfrac{i\pi}{2}\tilde{\gamma}_k\right\} & \tilde{y}_k\in\mho_k\\ 0^{1)} & \tilde{y}_k\notin\mho_k.\end{cases}$$

証明　積分$\Phi^{\tilde{q}_k}\hat{I}_0(\tilde{q})$の計算に停留位相の方法を用いよう．停留点$\tilde{q}_i=\tilde{q}_i{}^0$ $(i=1,\cdots,k)$は方程式系

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial\tilde{q}_i}=\tilde{p}_i,\qquad(i=1,\cdots,k)\tag{2.2}$$

で定まる．(2.2)において

$$\tilde{p}_j=\tilde{p}_j(\bar{\alpha}),\qquad\tilde{q}_i=\tilde{q}_i(\bar{\alpha}),\qquad(i=k+1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,k)\tag{2.3}$$

とおこう．Sの定義により

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial\tilde{q}_j}=\tilde{p}_j(\alpha(\tilde{q})),\qquad(j=1,\cdots,n).$$

また

$$\alpha(\tilde{q}(\bar{\alpha}))=\bar{\alpha},\qquad\bar{\alpha}\in\tilde{\Omega}_0$$

であるから，方程式系(2.2)は$\tilde{q}_i{}^0=\tilde{q}_i(\bar{\alpha})(i=1,\cdots,k)$により満たされる．(2.3)において$\bar{\alpha}=\alpha(\tilde{y}_k)$(ここに$\tilde{y}_k=\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\cdots,\tilde{q}_n$)とおけば$\tilde{p}_j(\alpha(\tilde{y}_k))\equiv\tilde{p}_j$ $(j=1,\cdots,k)$, $\tilde{q}_i=(\alpha(\tilde{y}_k))\equiv\tilde{q}_i(i=k+1,\cdots,n)$となるから〔これらの右辺を与えられた量として〕結局$\tilde{q}_i{}^0=\tilde{q}_i(\alpha(\tilde{y}_k))(i=1,\cdots,k)$が方程式系(2.2)の解であることがわかった．$\tilde{y}_k\notin\mho_k$のときは停留点$\tilde{q}_i{}^0$ $(i=1,\cdots,k)$は積分される函数の台には属さない．

領域$\mho_k$における方程式系(2.2)の解の一意性は次の事実からわかる[2)]．

$$\det\left\|\frac{\partial^2S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial\tilde{q}_i\partial\tilde{q}_j}\right\|_{i,j=1,\cdots,k}=\det\tilde{B}_k{}^{-1}=\frac{D\tilde{y}_k}{D\tilde{q}}=\frac{D\sigma(\alpha)/D\tilde{q}}{D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k}\neq0\tag{2.4}$$

ゆえに停留位相の方法が適用され，補題の主張が得られる(c. f. Фок[3]-[4])[3)]．

1)〔訳注〕　この0の意味は上に注意したように商空間Sにおける意味，すなわち$0 \bmod D(A)\cap D(d/d\alpha)$の意味である．

2)〔訳注〕　記号B_kはp. 140に初出．なおこの条件は1変数の場合を除き解の一意性を局所的にしか保障しないが，$\varphi(\alpha)$の台を各点において定まるある大きさ以下にとればよいから，1の分解を用いる以下の議論には困らない．この注意は以下の補題についても同様である．

3)　B. A. Фокの仕事では古典力学の接触変換と，古典的類似をもつ量子的演算子のユニタリ変換との関係が詳しく調べられている．

補題 7.3　函数 $\varphi(\alpha)$ の台は共通部分 $\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ に含まれるとする．このとき $\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ が非特異であるような点 $\tilde{\tilde{y}}_{k_2}\in\tilde{\tilde{U}}_{k_2}$ に対して次の等式が成り立つ[1]．

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1}=\exp\left(\frac{i\pi}{2}(\tilde{\gamma}_{k_1}-\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2})\right)\tilde{\tilde{I}}_{k_2} \tag{2.5}$$

証明　補題 7.2 により非特異点において[2]

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_1}}\tilde{I}_0=\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\tilde{\gamma}_{k_1}\right)\tilde{I}_{k_1}. \tag{2.6}$$

ゆえに

$$\tilde{I}_0=\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\tilde{\gamma}_{k_1}\right)\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1}. \tag{2.7}$$

ゆえに再び補題 7.2 により

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1}=\exp\left(\frac{i\pi}{2}\tilde{\gamma}_{k_1}\right)\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\tilde{I}_0=\exp\left(\frac{i\pi}{2}(\tilde{\gamma}_{k_1}-\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2})\right)\tilde{\tilde{I}}_{k_2} \tag{2.8}$$

となる．

補題 7.4　函数 $\varphi(\alpha)$ の台が $\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ に含まれるならば，

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1}=\exp\left(-\frac{i\pi}{2}m\right)\tilde{\tilde{I}}_{k_2}$$

なる式が成り立つ[3]．ここに m は $\tilde{\tilde{y}}_{k_2}$ に依存しないある整数である．

証明　左辺の積分

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})=\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1}$$

を具体的に書けば

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})=\frac{e^{i\pi(k_1-k_2)/4}A^{(k_1+k_2)/2}}{(2\pi)^{(k_1+k_2)/2}}\int\exp\{iA[S(\bar{\alpha})-\sum_{j=1}^{k_1}\tilde{p}_j(\tilde{q}_j(\bar{\alpha})-\tilde{q}_j)]\}$$
$$\times\exp\{-iA\sum_{j=1}^{k_2}\tilde{\tilde{p}}_j\tilde{\tilde{q}}_j\}\left|\frac{D\sigma(\alpha)}{D\tilde{y}_{k_1}}\right|^{1/2}\varphi(\bar{\alpha})d\tilde{p}_1\cdots d\tilde{p}_{k_1}d\tilde{\tilde{q}}_1\cdots d\tilde{\tilde{q}}_{k_2} \tag{2.9}$$

となる．ここで

---

1)　ここで $\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1}\equiv\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}[\Phi^{\tilde{q}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1}]_{\tilde{q}=\tilde{q}(\tilde{\tilde{q}})}$ の意．

2)　$\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ は非特異点だから，そのある近傍 $\Omega_0\subset\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ も非特異である．$e_1(\alpha),e_2(\alpha)$ を二つの領域 $\Omega_0,\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}\setminus\Omega_0$ に関する 1 の分解とすれば $\varphi(\alpha)=e_1(\alpha)\varphi(\alpha)+e_2(\alpha)\varphi(\alpha)$．この第 2 項に対しいま考えている積分は停留点を持たず〔次の補題の証明および前頁訳注参照〕，したがって S において 0 に等しい．ゆえに補題 7.3 は台が完全に非特異な領域 Ω_0 に含まれる函数 $e_1(\alpha)\varphi(\alpha)$ に対して証明すれば十分である．

3)〔訳注〕　$\tilde{\gamma}_{k_1}$ 等は α が特異点を通過するとき変わり得る．ここでは差 $\tilde{\gamma}_{k_1}-\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2}$ は一定値であることを示す．今度は $\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ は非特異である必要はない．

$$\tilde{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \tilde{\tilde{q}}_j, \qquad \det\|\beta_{ij}\| = 1,$$

$$\bar{\alpha} = \alpha(\tilde{y}_{k_1}) = \alpha\Big(\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_{k_1}, \sum_{j=1}^{n} \beta_{k_1+1,j} \tilde{\tilde{q}}_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} \tilde{\tilde{q}}_j\Big)$$

となっている．積分(2.9)の計算に停留位相の方法を適用しよう．停留点 $\tilde{\tilde{q}}_i{}^0$, $\tilde{p}_j{}^0 (i=1, \cdots, k_2, j=1, \cdots, k_1)$ は次の方程式系により定まる[1]．

$$\frac{\partial\big(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})\big)}{\partial \tilde{p}_j} = -\tilde{q}_j, \qquad (j = 1, \cdots, k_1) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\big(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})\big)}{\partial \tilde{\tilde{q}}_\nu} + \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \beta_{j\nu} - \tilde{\tilde{p}}_\nu = 0, \qquad (\nu = 1, \cdots, k_2). \tag{2.11}$$

ところで $S(\alpha)$ の定義式により，

$$\frac{\partial\big(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})\big)}{\partial \tilde{p}_j} = -\tilde{q}_j(\tilde{\alpha}), \qquad (j = 1, \cdots, k_1) \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\big(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})\big)}{\partial \tilde{q}_\nu} = \tilde{p}_\nu(\bar{\alpha}), \qquad (\nu = k_1+1, \cdots, n) \tag{2.13}$$

が成り立つ[2]．(2.13)から

$$\frac{\partial\big(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})\big)}{\partial \tilde{\tilde{q}}_\nu} = \sum_{l=k_1+1}^{n} \frac{\partial\big(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})\big)}{\partial \tilde{q}_l} \beta_{l\nu} = \sum_{l=k_1+1}^{n} \tilde{p}_l \beta_{l\nu}. \tag{2.14}$$

(2.12), (2.14)により方程式系(2.10)-(2.11)は次のように書き直される．

$$\tilde{q}_j(\bar{\alpha}) = \tilde{q}_j, \qquad (j = 1, \cdots, k_1) \tag{2.10$'$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j \beta_{j\nu} = \tilde{\tilde{p}}_\nu, \qquad (\nu = 1, \cdots, k_2). \tag{2.11$'$}$$

方程式系(2.10)′-(2.11)′ は

$$\tilde{p}_j = \tilde{p}_j{}^0 = \tilde{p}_j{}^0(\bar{\bar{\alpha}}), \qquad \tilde{\tilde{q}}_i = \tilde{\tilde{q}}_i{}^0 = \tilde{\tilde{q}}_i{}^0(\bar{\bar{\alpha}}), \qquad (j = 1, \cdots, k_1,\ i = 1, \cdots, k_2)$$

なる解を持つことが確かめられる．ここに $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ は方程式系

$$\tilde{\tilde{p}}_j(\alpha) = \tilde{\tilde{p}}_j \quad (j = 1, \cdots, k_2), \qquad \tilde{\tilde{q}}_i(\alpha) = \tilde{\tilde{q}}_i \quad (i = k_2+1, \cdots, n)$$

1)〔訳注〕　今は $\tilde{\tilde{y}}_{k_2} = \tilde{\tilde{p}}_1, \cdots, \tilde{\tilde{p}}_{k_2}, \tilde{\tilde{q}}_{k_2+1}, \cdots, \tilde{\tilde{q}}_n$ が与えられた量である．積分に関する独立変数は $\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_{k_1}, \tilde{\tilde{q}}_1, \cdots, \tilde{\tilde{q}}_{k_2}$ であり，残りの変数は上の関係式によりこれらの函数となっている．

2)〔訳注〕　$dS = pdq = \tilde{p}d\tilde{q}$ を用いる．なお(2.13)式では $\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_{k_1}, \tilde{q}_{k_1+1}, \cdots, \tilde{q}_n$ を独立変数とみなしており，$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_{k_1}, \tilde{q}_{k_1+1}, \cdots, \tilde{q}_n)$ である．

の解である．さらに積分(2.9)の位相の2階導函数の行列$A(\bar{\alpha})$の行列式を$D_{k_1,k_2}(\bar{\alpha})$としよう．公式(2.8)から，$\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$が非特異であるような点$\tilde{\tilde{y}}_{k_2}$では

$$\lim_{h\to 0} \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{I}_{k_1} < \infty$$

となる[1]．したがって(第6章§2最後の注意4を見よ)$D_{k_1,k_2}(\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2}))\neq 0$が得られ，停留位相の方法が適用できる．(2.8)式に留意すれば，非特異点$\bar{\alpha}$において

$$|D_{k_1,k_2}(\bar{\alpha})| = \left|\frac{\tilde{J}_{k_1}(\bar{\alpha})}{\tilde{\tilde{J}}_{k_2}(\bar{\alpha})}\right| \tag{2.15}$$

が得られる．連続性により，この式は特異点$\alpha\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$においても成り立つ．したがって$\bar{\alpha}\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$において$D_{k_1,k_2}(\bar{\alpha})\neq 0$である．停留位相の方法を用いれば

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{k_2}) = \exp\left(-\frac{i\pi}{2}m\right)\tilde{\tilde{I}}_{k_2}$$

を得る．ここに$m=\mathrm{Ind}\,A(\bar{\alpha})-k_1$．さて，(2.15)により$D_{k_1,k_2}(\bar{\alpha})$は二つの地図$\tilde{\Omega}_{k_1}, \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$の共通部分で0にならないのだから$\mathrm{Ind}\,A(\alpha)$は$\alpha\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$に対し不変となり補題は証明された．

系　差$\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2}-\tilde{\gamma}_{k_1}$は任意の非特異点$\alpha\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$において〔4を法として〕$m$に等しい．

さて，mは$\alpha\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$に依存しないから，$\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$内の任意の非特異点$\alpha_1, \alpha_2$に対し

$$[\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2}-\tilde{\gamma}_{k_1}](\alpha_1) = [\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2}-\tilde{\gamma}_{k_1}](\alpha_2).$$

ゆえに

$$\tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha_1)-\tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha_2) = \tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2}(\alpha_1)-\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2}(\alpha_2) = \text{一定}$$

となる．ゆえにα_1からα_2に到る道の指数〔の4を法とする剰余類〕は，これらの点α_1, α_2がどの地図に属するとみなすかに依らず一定であることが示された．これから道の指数のホモトピー不変性に関する定理2.1が示される[2]．

2. 定理2.3の証明　第2章(2.3)式の形の正準作用素で被覆$\mathcal{H}$，中心の集合$\mathcal{X}$，1の分解$\{e^j\}$，道$\{l^j\}$に対応するものを$K^{r,\alpha^0}_{A,\Gamma}[\mathcal{X}, \mathcal{H}, \{e^j\}, \{l^j\}]$と記そう．

---

1)〔訳注〕　今はhの代わりに一般のAでやっているのでここは‘極限記号下の式$\in L_2[\boldsymbol{R}^n, H]$’の意味に解すべきである．次に引用されている注意4はその意味でも成り立つ．

2)　定義により$\mathrm{Ind}\,l[\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}]=m$であった．ここに$\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}$は地図$\tilde{\Omega}_{k_1}, \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$の中心点である．

$\int pdq$ および $\mathrm{Ind}\, l[\alpha^0, \alpha]$ の局所的ホモトピー不変性により，作用素 $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ が(商空間 S において)与えられた地図 $\mathscr{H}$，中心の集合 $\mathscr{X}$ および1の分解だけで定まり道の如何に依らないための必要十分条件が第2章の条件(2.5)であることが容易に確かめられる．すなわち

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}, \mathscr{H}, \{e^j\}, \{l^j\}] \sim K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}, \mathscr{H}, \{e^j\}, \{\tilde{l}^j\}]$$

である．よって以下これを単に $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}, \mathscr{H}, \{e^j\}]$ と書くことにする．

正準作用素が1の分解に依らないことを示すために，次の補題を証明する．

補題 7.5　被覆 $\mathscr{H}(\beta)$ とその領域 $\Omega^i = \Omega^i(\beta)\,(i=1, \cdots, N)$，中心点の集合 $\mathscr{X}(\beta)$，および1の分解 $e^i(\alpha) = e^i(\alpha, \beta)$ はいずれもパラメーター $\beta \in [0, \varepsilon]$ に依存しており，かつ〔i を決めるごとに〕各領域 $\Omega^i(\beta)\,(i=1, \cdots, N)$ はすべての β に対してある同一の平面 $\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \cdots, \tilde{q}_n$ に射影可能とする．また $e^i(\alpha, \beta)$ は β につき2回微分可能とする．このとき

$$\frac{\partial}{\partial\beta} K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}(\beta), \mathscr{H}(\beta), \{e^i(\alpha, \beta)\}]\varphi(\alpha) = 0$$

証明　補題の主張は点 $\beta=0$ において証明すれば十分である．$\tilde{e}_k{}^j(\alpha, \beta)$ をある一つの地図 $\tilde{\Omega}_k{}^j(\beta)$ に対応する1の分解の元とし地図 $\tilde{\Omega}_k{}^j(\beta)$ はただ l 個の地図 $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_i}{}^i(\beta), i=1, \cdots, l$ とのみ交わるとする[1]．

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha) = K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\sum_{i=1}^{N} e^i(\alpha, 0)\varphi(\alpha) \tag{2.16}$$

を考える[2]．〔ここに $e^j \equiv \tilde{e}_k{}^j$.〕　さて

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta} K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \tilde{e}_k{}^j(\alpha, 0)\varphi(\alpha)\right]_{\beta=0} = 0$$

を示そう．定義により，

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta} K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0} \tilde{e}_k{}^j(\alpha, 0)\varphi(\alpha)\right]_{\beta=0} = e^{i\gamma}\left\{\Phi^{\tilde{p}_k}\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\tilde{\gamma}_k{}^j\right)\tilde{I}_k \frac{\partial \tilde{e}_k{}^j(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=1}^{l} \Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_\nu}} \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\tilde{\tilde{\gamma}}^\nu\right)\tilde{\tilde{I}}_{k_\nu} \frac{\partial \tilde{\tilde{e}}^\nu(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right\}_{\beta=0} \tilde{e}_k{}^j(\alpha, 0). \tag{2.17}$$

ここに1の分解の元 $\tilde{\tilde{e}}^\nu$ および $\tilde{\tilde{I}}_{k_\nu}$ は地図 $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_\nu}{}^\nu(\beta)$ に対応するものであり，

$$\Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_\nu}} f(\alpha) \equiv \Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_\nu}} f(\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_\nu}))$$

---

1)〔訳注〕 $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_i}{}^i(\beta)$ は前出 $\Omega^i(\beta)\,(i=1, \cdots, N)$ のどれかである．

2)〔訳注〕 ここの $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ はパラメーターの値 β に対応する正準作用素の略記である．右辺の1の分解は証明の便宜上挿入した．

の意味である．補題7.3，7.4により $\alpha\in\tilde{\Omega}_k{}^j(\beta)\cap R$ においては[1]

$$\Phi^{\tilde{p}_k}\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\tilde{\gamma}_k{}^j\right)\tilde{I}_k\frac{\partial\tilde{\tilde{e}}^\nu(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=0}\tilde{e}_k{}^j(\alpha,0)$$

$$=\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\tilde{\tilde{\gamma}}^\nu\right)\Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_\nu}}\tilde{\tilde{I}}_{k_\nu}\frac{\partial\tilde{\tilde{e}}^\nu(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=0}\tilde{e}_k{}^j(\alpha,0),\qquad(\nu=1,\cdots l)\quad(2.18)$$

である．また同じ点において

$$\tilde{e}_k{}^j(\alpha,\beta)+\sum_{i=1}^{l}\tilde{\tilde{e}}^i(\alpha,\beta)=1$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial\beta}[\tilde{e}_k{}^j(\alpha,\beta)+\sum_{i=1}^{l}\tilde{\tilde{e}}^i(\alpha,\beta)]=0.$$

ゆえに(2.17)と(2.18)とから補題を得る．

さて，$\overline{\mathscr{H}},\overline{\overline{\mathscr{H}}}$ を同一の中心点の集合 $\mathscr{X}$ をもつ地図帳とする．すなわち一つの中心点 $\alpha^i\in\mathscr{X}$ には領域 $\overline{\Omega}^i\in\overline{\mathscr{H}}$ および $\overline{\overline{\Omega}}^i\in\overline{\overline{\mathscr{H}}}$ が対応しているものとする．中心点 $\mathscr{X}$ と領域 $\Omega^i=\overline{\Omega}^i\cup\overline{\overline{\Omega}}^i$ とから成る地図帳 $\mathscr{H}$ を考えよう．これらに対応する1の分解をそれぞれ $\{\bar{e}^i(\alpha)\}$，$\{\bar{\bar{e}}^i(\alpha)\}$，$\{e^i(\alpha)\}$ とする．被覆 $\Omega^i(\beta)$ は $\beta\in(0,1]$ のとき $\Omega^i(\beta)=\Omega^i$，また $\Omega^i(0)=\overline{\Omega}^i$ なるものとし，これに対応する1の分解

$$e^i(\alpha,\beta)=(1-\beta)\bar{e}^i(\alpha)+\beta e^i(\alpha)$$

を考える．補題7.5により正準作用素は地図帳を $\mathscr{H}$ から $\overline{\mathscr{H}}$ に変えても(商空間 S において)不変である．同様のことが地図帳 $\overline{\overline{\mathscr{H}}}$ についても成り立つから，結局地図帳 $\overline{\mathscr{H}}$ から $\overline{\overline{\mathscr{H}}}$ へのとり替えは0に同値な量でしか正準作用素に影響しないことがわかった．ゆえに $K_{A,\Gamma}^{r,\alpha^0}[\mathscr{X},\mathscr{H},\{e^i\}]=K_{A,\Gamma}^{r,\alpha^0}[\mathscr{X}]$ と書くことができる．

今度は地図帳 $\mathscr{H}$ が与えられているとし，点 $\bar{\alpha}\in R$，$\bar{\alpha}\notin\mathscr{X}$ をとる．$\mathscr{H}$ を(中心 $\mathscr{X}$ は一定にしたまま)地図帳 $\mathscr{H}'$ に変更し，この新しい地図帳においては点 $\bar{\alpha}$ がただ1枚の地図 $\tilde{\Omega}_k{}^{i_0}$ にのみ属するようにする．すでに証明したところにより，この手続きで $K_{A,\Gamma}^{r,\alpha^0}$ は不変である．点 $\bar{\alpha}$ を囲む領域をそれが $\tilde{\Omega}_k{}^{i_0}$ とのみ交わり，かつ全体として点 $\bar{\alpha}$ に対応する焦点座標平面に射影可能であるようにとる．こうして点 $\bar{\alpha}$ を中心に持つ新しい地図を作る．これを $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k'}{}^{\omega}$ と記そう．地図帳 $\mathscr{H}'$ にこれをつけ加えたものを $\mathscr{H}''$ で，また $\mathscr{X}$ に $\bar{\alpha}$ をつけ加えたものを $\mathscr{X}''$ で表わす．$\{e_{(1)}{}^i(\alpha)\}$ を地図帳 $\mathscr{H}'$ に関する1の分解とすれば，これから地図

1)〔訳注〕 R は $\varphi(\alpha)$ の台．

帳 $\mathscr{H}''$ に関する1の分解 $\{e_{(2)}{}^i(\alpha)\}$ で次の性質を持つものが作られる．

$$\begin{cases} e_{(2)}{}^i(\alpha) \equiv e_{(1)}{}^i(\alpha) \qquad (i \neq i_0), \\ e_{(1)}{}^{i_0}(\alpha) = e_{(2)}{}^{i_0}(\alpha) + e_{(2)}{}^{\omega}(\alpha). \end{cases}$$

$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)$ の地図帳 $\mathscr{H}', \mathscr{H}''$ における，それぞれ1の分解 $\{e_{(1)}{}^i\}$ および $\{e_{(2)}{}^i\}$ を用いて作った表現の差を見よう．それは明らかに

$$\begin{aligned} &K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}]\varphi(\alpha) - K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}'']\varphi(\alpha) \\ &= \exp\left\{i\gamma - \frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^{i_0}]\right\}\Phi^{\tilde{p}_k}[e_{(1)}{}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}{}^{i_0}(\alpha)]\tilde{I}_k \\ &\quad -\exp\left\{i\gamma - \frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \bar{\alpha}]\right\}\Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k'}}e_{(2)}{}^{\omega}(\alpha)\tilde{\tilde{I}}_{k'}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

ここで $e_{(1)}{}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}{}^{i_0}(\alpha) = e_{(2)}{}^{\omega}(\alpha)$ であり $e_{(2)}{}^{\omega}$ の台は $\tilde{\Omega}_k{}^{i_0} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k'}{}^{\omega}$ に含まれるから，補題7.3および7.4により差(2.19)は0に同値である．したがって地図帳 $\mathscr{H}$ の中心 $\mathscr{X}$ に新しい点を付け加えることができ，これによって作用素 $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ は不変である．最後に二つの正準地図帳 $\mathscr{H}', \mathscr{H}''$ とおのおのの中心 $\mathscr{X}', \mathscr{X}''$ とが与えられているとしよう．中心 $\mathscr{X} = \mathscr{X}' \cup \mathscr{X}''$ を持つ地図帳 $\mathscr{H}$ を考えれば，すでに示したところにより

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}'] \sim K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}] \quad \text{および} \quad K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}''] \sim K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}].$$

したがって

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}'] \sim K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}'']$$

となり定理2.3が証明された．

定理2.4の証明も，補題7.2–7.4において停留位相の方法が R_z の冪に関する漸近級数を与えることを考慮すれば同様にして得られる．

3. 定理2.2の証明　Γ_0, Γ_t を二つのLagrange多様体とし，Γ_0 は Γ_t に連続に変形可能とする．すなわち，これらはLagrange多様体の〔同型な〕1パラメーター族 $\Gamma_\tau (0 \leqq \tau \leqq t)$ に埋め込まれるとする．

$\mathscr{H}_0$ を例のように初期Lagrange部分多様体 $\Gamma_0 = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ の正準地図帳とする．部分多様体 Γ_{τ_1} から Γ_{τ_2} への〔上の1パラメーター族によって生ずる〕写像を u_{τ_1,τ_2} で表わす．$\mathscr{H}_\tau$ を部分多様体 Γ_τ の正準地図帳とする．

Ω^j は地図 $\tilde{\Omega}_k{}^j \in \mathscr{H}_0$ に対応しているとする．地図 $\tilde{\Omega}_k{}^j$ の定義により，領域 Ω^j は平面 $\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \cdots, \tilde{q}_n$ に1対1に射影される．$\Omega_{\tau_0}{}^j = u_{0,\tau_0}\Omega^j$ とおこう．

〔Ω^j を少しちぢめておけば〕十分小さい $\tau_0 \leqq \varepsilon$ に対しては明らかに領域 $\Omega_{\tau_0}{}^j$ もまた同じ平面に1対1に射影される．領域 Ω^j の個数は有限だから[1]，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば $\tau_0 \leqq \varepsilon$ のときこれらすべての領域 $\Omega_{\tau_0}{}^j$ において原像 Ω^j におけると同じ局所座標 $\tilde{y}_k$ を採用することができる．このように，Γ_{τ_0} 上の地図帳 $\mathscr{H}_{\tau_0}$ として，領域 $\Omega_{\tau_0}{}^i$ と座標 $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \cdots, \tilde{q}_n$ とを持った局所地図 $(\tilde{\Omega}_{\tau_0}{}^i)_k = u_{0,\tau_0} \tilde{\Omega}_k{}^i$ の集まりを採用することができる．ゆえに定義により $\mathscr{H}_{\tau_0} = u_{0,\tau_0} \mathscr{H}_0$ と書くことができる．

Borel の補題により有限区間 $[0, t]$ を分点 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m = t$ を用いて長さ Δ〔以下〕の有限個の部分区間に分け，おのおのは次の性質を持つようにできる：Γ_{τ_i} 上に地図帳 $\mathscr{H}_{\tau_i}{}^i$ を選んで $\mathscr{H}_\tau{}^i = u_{\tau_i,\tau} \mathscr{H}_{\tau_i}{}^i$ が $\tau_i \leqq \tau \leqq \tau_{i+1}$ なる限り Γ_τ の地図帳となるようにすることができる．一方 $\Gamma_{\tau_{i+1}}$ の上には一般には $\mathscr{H}_{\tau_{i+1}}{}^i = u_{\tau_i,\tau_{i+1}} \mathscr{H}_{\tau_i}{}^i$ とは異なる地図帳 $\mathscr{H}_{\tau_{i+1}}{}^{i+1}$ を選び，$\mathscr{H}_\tau{}^{i+1} = u_{\tau_{i+1},\tau} \mathscr{H}_{\tau_{i+1}}{}^{i+1}$ が $\tau_{i+1} \leqq \tau \leqq \tau_{i+2}$ において地図帳となるようにする．

部分多様体 Γ_{τ_i} の上にサイクル γ_{τ_i} を考え，変形 $\Gamma_{\tau_i} \to \Gamma_{\tau_{i+1}}$ によって $\mathrm{Ind}\, \gamma_{\tau_i}$ が不変であること，すなわち $\mathrm{Ind}\, \gamma_{\tau_i} = \mathrm{Ind}\, \gamma_{\tau_{i+1}}$ であることを示そう．$\mathrm{Ind}\, \gamma$ の地図帳のとり替えによる不変性はすでに示されているから，これにより変形 $\Gamma \to \Gamma_t$ による任意のサイクルの指数の不変性が証明されることになる．

はじめに，サイクル γ_{τ_i} は地図帳 $\mathscr{H}_{\tau_i}{}^i$ の特異地図を二つ続けて通ることはないように Γ_{τ_i} 上で変形できるとしよう．サイクル γ_{τ_i} の切片 $l_{\tau_i} = l_{\tau_i}[\alpha^1, \alpha^2]$ は三つの地図 $\Omega^1, \tilde{\Omega}_k, \Omega^2$ の中に完全に含まれているものとする．ここに $\tilde{\Omega}_k$ は特異であり，Ω^1, Ω^2 は非特異である．$\tau_i \leqq \tau \leqq \tau_{i+1}$ において地図 $u_{\tau_i,\tau} \Omega^\sigma (\sigma = 1, 2)$，$u_{\tau_i,\tau} \tilde{\Omega}_k$ を再び $\Omega^\sigma (\sigma = 1, 2)$，$\tilde{\Omega}_k$ と記そう．切片 $u_{\tau_i,\tau_{i+1}} l_{\tau_i} = l_{\tau_{i+1}} \subset \gamma_{\tau_{i+1}}$ を考え，$\mathrm{Ind}\, l_{\tau_i} = \mathrm{Ind}\, l_{\tau_{i+1}}$ を示そう．指数はその定義の仕方から特異点を通過するときのみ値を変えるのだから，これにより $\mathrm{Ind}\, \gamma_{\tau_i}$ の不変性が証明される．さて，同じ注意により $\alpha^1, \alpha^2 \in \tilde{\Omega}_k$ と仮定できる．すなわち $\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_k \cap \Omega^1$，$\alpha^2 \in \tilde{\Omega}_k \cap \Omega^2$ である．$\Omega^\sigma (\sigma = 1, 2)$，$\tilde{\Omega}_k$ の定義により，各共通部分 $\tilde{\Omega}_k \cap \Omega^1$，$\tilde{\Omega}_k \cap \Omega^2$ では Jacobi 行列式 $D\tilde{y}_0 / D\tilde{y}_k$ は0にならない．また以上の構成法より，それは $u_{\tau_i,\tau} \alpha^\sigma (\sigma = 1, 2)$，$\tau_i \leqq \tau \leqq \tau_{i+1}$ の上でも0にならない．したがって，これと等しい値を持つ行列 $\tilde{B}_k = \| \partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{p}_j \|_{i,j \leqq k}$ の行列式もこれらの点において0にならない．ゆえに行列

1)〔訳注〕 Γ_τ がコンパクトでないときはこれから考察するサイクルの近くだけを考えればよい．

$\tilde{\tilde{B}}_k$ の慣性指数は $\alpha^\sigma\in\Gamma_{\tau_i}$ から $u_{\tau_i,\tau_{i+1}}\alpha^\sigma\in\Gamma_{\tau_{i+1}}$ に移る間不変であり，したがって $\mathrm{Ind}\, l_{\tau_i}=\mathrm{Ind}\, l_{\tau_{i+1}}$ が示された．

次に一般の場合を考えよう．サイクル γ_{τ_i} および $\gamma_{\tau_{i+1}}$ を変形してこれらは通過する各地図の中心点を必ず通るようにする．サイクル γ_{τ_i} の切片で多様体 Γ_{τ_i} の地図 $\tilde{\Omega}_{k_1}$ の中心点 $\tilde{\alpha}_{k_1}$ から地図 $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ の中心点 $\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}$ に至るものを考える．これに対応するサイクル $\gamma_{\tau_{i+1}}$ の道の切片，すなわち，地図 $\tilde{\Omega}_{k_1}'=u_{\tau_i,\tau_{i+1}}\tilde{\Omega}_{k_1}$ の中心点 $\tilde{\alpha}_{k_1}'\in\Gamma_{\tau_{i+1}}$ から地図 $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}'=u_{\tau_i,\tau_{i+1}}\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ の中心点 $\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}'\in\Gamma_{\tau_{i+1}}$ に至るものを考え，これらの道の指数が等しいことを示そう．そうすれば明らかにサイクル γ_{τ_i} の指数とサイクル $\gamma_{\tau_{i+1}}$ の指数とは等しくなる．

地図 $\tilde{\Omega}_k$ の非特異点 α^1 から，同じ地図の中心点 $\tilde{\alpha}_k$ に至る道の指数は点 α^1 における行列 $\tilde{B}_k$ の慣性指数として定義されたことを思い出そう．$\alpha^1\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ を非特異とし，$\tilde{\alpha}_{k_1},\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}$ をそれぞれ地図 $\tilde{\Omega}_{k_1},\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ の中心点とする．明らかに $\mathrm{Ind}\, l[\tilde{\alpha}_{k_1},\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}]=-\mathrm{Ind}\, l[\alpha^1,\tilde{\alpha}_{k_1}]+\mathrm{Ind}\, l[\alpha^1,\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}]$ であり，したがって $\tilde{\alpha}_{k_1}$ から $\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}$ に至る道の指数は点 $\alpha^1\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ においてとられた行列 $\tilde{\tilde{B}}_{k_2}$ と $\tilde{B}_{k_1}$ の慣性指数の差に等しい．補題 7.4 の証明より，この差は行列 $A(\alpha^1)$ の慣性指数 $-k_1$ に等しい．

われわれは常に $\Gamma_{\tau_i},\Gamma_{\tau_{i+1}}$ が一般の位置にあると仮定することができる(Abraham[1])．しかしある $\tau\in\{\tau_i\leqq\tau\leqq\tau_{i+1}\}$ に対しては多様体は一般の位置でなくなるかもしれない．

点 $\alpha^0\in\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ は γ_{τ_i} の上に，また $\alpha_1{}^0=u_{\tau_i,\tau_{i+1}}\alpha^0$ は $\gamma_{\tau_{i+1}}$ の上にあるとし，これらはともに非特異とする．点 α^0 および $\alpha_1{}^0$ における行列 $A(\alpha)$ の慣性指数が等しいことを示そう．これにより上に述べたところと合わせてサイクル γ_{τ_i} の指数の不変性の証明が完結することになる．

等式(2.15)は特異点の作る多様体 M の次元が $n-1$ を越えないときに証明されたが，連続性によって一般の場合に拡張できる．ゆえに $\det A(\alpha)$ は共通部分 $\tilde{\Omega}_{k_1}\cap\Omega_{k_2}$ の上で 0 にならず，特に道 $u_{\tau_i,\tau}\alpha$，$\tau_i\leqq\tau\leqq\tau_{i+1}$ に沿って 0 でない．したがってこの道に沿って行列 $A(\alpha)$ の慣性指数は不変である(そうでなければ $\det A(\alpha)$ はどこかで 0 となる)．以上で定理 2.2 が証明された．ここから膜に対する定理 2.1 の類似も示される．

§3　解の大域的漸近形

1. ここでは定理4.1を$m=1$，$\Lambda_1\equiv 1$の場合に，すなわち定理4.1aを証明する．mが一般の場合のこの定理，および定理4.2も全く同様に証明される．

まず始めに時間tが十分小さい場合には定理4.1aは定理6.2において証明された主張から直ちに得られる(すなわち定理4.1aは局所的に正しい)ことを示そう．そのために第6章の公式(3.37)から第4章の公式(2.12)を導こう．ベクトル函数$\varphi^0(\alpha,h)$(定理4.1aを見よ)の台は領域Ω^iに属するとする．第4章(2.13)によりベクトル函数$\varphi(\alpha,t,h)$の台は$\Omega_t{}^i$に属する．ゆえにこの場合(2.12)は正準作用素の定義により第6章(3.37)式のように書けることが等式

$$S(p,x,t)=\int_{l[\alpha^0,\alpha_t{}^0]}\{-Hdt+pdq\}+\int_{l[\alpha_t{}^0,\alpha_t(\tilde{y}_k)]}\tilde{p}d\tilde{q}-\sum_{i=1}^{k}\tilde{p}_i\tilde{q}_i(\alpha_t(\tilde{y}_k))$$

を考慮すればわかる[1]．さて，公式(3.37)は

$$D[\tilde{P}_1(\alpha,t),\cdots,\tilde{P}_k(\alpha,t),\tilde{Q}_{k+1}(\alpha,t),\cdots,\tilde{Q}_n(\alpha,t)]/D\alpha$$

が0にならぬという仮定のもとに，したがって$t\leqq\varepsilon$に対して得られたものであった．正準作用素は(3.37)の形の式の有限個の和に分解されるから，結局定理4.1aの主張が$t\leqq\varepsilon$に対して得られたことになる．以上の議論はもちろん任意の初期時刻t_0に対して適用可能である．第4章の問題(2.4)-(2.5)の解$Q(\alpha,t)$，$P(\alpha,t)$は部分多様体Γ_0から部分多様体Γ_tへの写像$u_{o,t}$を与える．

写像$u_{0,T}$に定理2.2の証明(§2の3を見よ)のはじめに用いた構成法を適用し，線分$[0,T]$を$t=0,t_1,t_2,\cdots,T$により区間に分割する．そこで導入された記号$\mathcal{H}_t{}^0=u_{0,t}\mathcal{H}^0$，$t\leqq t_1$，$\mathcal{H}_t{}^i=u_{t_i,t}\mathcal{H}_{t_i}{}^i$，$t_i\leqq t\leqq t_{i+1}$を踏襲しよう．$t=0$において第4章の方程式(2.11)の解は第4章の条件(2.11a)を満たしているとする．上に証明したように，この解は$t\leqq t_1$において第4章(2.12)の形に表わすこと

---

1)〔訳注〕　$\alpha_t(\tilde{y}_k)$を通る陪特性曲線の始点を$\alpha_0(\tilde{y}_k)\leftrightarrow(p^0,x^0,0)$と記せば初期位相は

$$S(p^0,x^0,0)=\int_{l[\alpha^0,\alpha_0(\tilde{y}_k)]}pdq-\sum_{i=1}^{k}\tilde{p}_i{}^0\tilde{q}_i{}^0(\alpha_0(\tilde{y}_k))$$

である．Sの軌道微分はいま

$$\frac{dS}{dt}=-H-\sum_{i=1}^{k}\tilde{q}_i\frac{d\tilde{p}_i}{dt}+\sum_{j=k+1}^{n}\tilde{p}_j\frac{d\tilde{q}_j}{dt}=-H+p\frac{dq}{dt}-\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{k}\tilde{p}_i\tilde{q}_i\Big)$$

だから

$$S(p,x,t)=S(p_0,x_0,0)+\int_{l[\alpha_0(\tilde{y}_k),\alpha_t(\tilde{y}_k)]}(-Hdt+pdq)-\sum_{i=1}^{k}\tilde{p}_i\tilde{q}_i(\alpha_t(\tilde{y}_k))+\sum_{i=1}^{k}\tilde{p}_i{}^0\tilde{q}_i{}^0(\alpha_0(\tilde{y}_k))$$

ここで$-Hdt+pdq$が膜上の閉微分形式であることを考慮して積分路を変形すれば上の式を得る．

ができる．ここに $\alpha_t{}^0=\alpha^0$，$\mathrm{Ind}\, l[\alpha^0, \alpha_t{}^0]=0$，$\mathscr{H}[\Gamma_t]=\mathscr{H}_t{}^0$ である[1)]．ゆえに

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t,h}[\mathscr{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu\chi_\nu.$$

定理4.1aの条件から，方程式(2.11)の解で0に同値な初期値を満たすものは，それ自身0と同値であることがわかることに注意しよう．

方程式(2.11)の解に対し，$t=t_1$ において新たに次の形の初期条件を課する．

$$\psi(x,t_1) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_{t_1},h}[\mathscr{H}_{t_1}{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha,t_1)\chi_\nu. \tag{3.1}$$

解の一意性(定理4.1の条件を見よ)によりこれから $t\geqq t_1$ における問題(2.11)，(2.11a)の解が得られる．初期条件(3.1)において別の地図帳 $\mathscr{H}_{t_1}{}^1$ に移れば，0に同値な函数の誤差範囲で

$$\psi(x,t_1) = K^{\tilde{\gamma},\alpha_1{}^0}_{1/h,\Gamma_{t_1},h}[\mathscr{H}_{t_1}{}^1]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha,t_1)\chi^\nu$$

となる．ここに $\alpha_1{}^0$ は $\mathscr{H}_{t_1}{}^1$ の始点であり，

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{h}\int_{l[\alpha^0,\alpha_1{}^0]} pdq+\gamma-\frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\, l[\alpha^0,\alpha_1{}^0].$$

上に注意したようにこれによって方程式の解は $t>t_1$ において0に同値な函数による変更を受けるのみである．ゆえに $t_1\leqq t\leqq t_2$ において

$$\psi(x,t) = K^{\tilde{\gamma},\alpha_1{}^0}_{1/h,\Gamma_t,h}[\mathscr{H}_t{}^1]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu\chi_\nu$$

を得る．この手続きをくり返せば，帰納法により定理4.1aが得られる[2)]．

2．定理4.4の証明　定理4.1の証明に用いた記号を踏襲し，$t\leqq t_1$ において

$$K^{\tilde{\gamma}_t,\alpha_t{}^0}_{1/h,\Gamma_t(E^j)}[\mathscr{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha,t)\chi_\nu(\alpha)$$

を考える．ここに

$$\alpha_t{}^0=u_{0,t}\alpha^0,\qquad \tilde{\gamma}_t=\frac{1}{h}\int_{l[\alpha^0,\alpha_t{}^0]}pdq-Hdt,\qquad \varphi_\nu(\alpha,t)=\xi_\nu(\alpha)e^{i\mu t},\qquad \mu=\mu(E^j)$$

---

1)〔訳注〕　以下 $\alpha_t{}^0=u_{0,t}\alpha^0$ と書くべきところを同じ座標を使っているという意味で α^0 と略記している．

2)〔訳注〕　正準作用素の下つき3番目の添え字 R_z(または h)はこの正準作用素が漸近展開のすべての項を伴なうものであることを示しているようにも受け取れる(第2章 p. 132, p. 143, 第4章 p. 167, 第7章 p. 260 参照)．そうだとすればこの後定理の条件2を用いながら h の冪指数に関する帰納法を用いて漸近展開の続き(ここでは1の分解の函数の漸近展開)を作らねばならぬ．そのための局所的計算は一応第6章で与えられている．

である．第6章(3.25)式により，そこにおいて $N=1$ とすれば(本節初めの注意も考慮に入れて) $\mathrm{Ind}\, l[\alpha^0, \alpha_t^0]=0$ なることから

$$\left(-ih\frac{\partial}{\partial t}+\hat{L}\right)K^{\tilde{\gamma}_t, \alpha_t^0}_{1/h, \Gamma_t(E^j)}[\mathscr{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha, t)\chi_\nu(\alpha) = h^2 z(x, t, h)$$

が定義の仕方よりわかる．ここに $z(x, t, h)\in L_2[B^1, C_2]$，すなわち2個の連続パラメーター t, h を含む $x\in\boldsymbol{R}^n$ の B^1 値2乗可積分函数である．以下文字 z_1, $z_2, z_3, \cdots$ は $L_2[B^1, C_2]$ の元を表わすものとする．

明らかに

$$K^{\tilde{\gamma}_t, \alpha_t^0}_{1/h, \Gamma_t(E^j)}[\mathscr{H}_t{}^0] = \exp\left(-\frac{iE^j t}{h}\right)K^{0, \alpha^0}_{1/h, \Gamma(E^j)}[\mathscr{H}_t{}^0]$$

となる．何となれば，仮定により $\Gamma_t(E^j)=\Gamma(E^j)$，$H=E^j$ であり，部分多様体 $\Gamma_t(E^j)$ 上の点 α_t^0 は相空間の中で考えて部分多様体 $\Gamma(E^j)$ 上の点 α^0 と一致している〔と思ってよい〕から[1)]

$$\tilde{\gamma}_t = -\frac{1}{h}\int_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]} H dt = -\frac{E^j t}{h}$$

となっているからである．定理2.3の条件は第4章(4.1)により満たされているから，補題7.5が適用でき

$$\frac{\partial}{\partial t}K^{0, \alpha^0}_{1/h, \Gamma(E^j)}[\mathscr{H}_t{}^0] = hz_1(x, t, h)$$

が得られる．ゆえに

$$\begin{aligned}
&-ih\frac{\partial}{\partial t}K^{\gamma_t, \alpha_t^0}_{1/h, \Gamma_t(E^j)}[\mathscr{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha, t)\chi_\nu(\alpha)\\
&= -ih\frac{\partial}{\partial t}\left\{\exp\left(-\frac{iE^j t}{h}\right)K^{0, \alpha^0}_{1/h, \Gamma(E^j)}[\mathscr{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\chi_\nu(\alpha)e^{i\mu t}\right\}\\
&= (-E^j+h\mu)\exp\left\{i\left(\mu-\frac{E^j}{h}\right)t\right\}K^{0, \alpha^0}_{1/h, \Gamma(E^j)}[\mathscr{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\chi_\nu(\alpha)+h^2 z_2.
\end{aligned}$$

これから

$$[\hat{L}-E^j+h\mu]K^{0, \alpha^0}_{1/h, \Gamma(E^j)}[\mathscr{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\chi_\nu(\alpha) = h^2 z_3 \tag{3.2}$$

---

1)〔訳注〕 より正確にいえば左辺の正準作用素の $\alpha_t(\tilde{y}_k)$ における値を右辺の正準作用素の(陪特性曲線の始点) $\alpha_0(\tilde{y}_k)$ における値と比較しようというのだから，p, q 座標についてこの Hamilton 流により引き起こされる正準変換を行なうことになる．この結果陪特性曲線は t 軸に平行となり $\int_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]} pdq$ の分は0となる．

となり，$E^j-h\mu(E^j)$が作用素$\hat{L}$のスペクトルの点であるか，あるいは

$$\|K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^j)}[\mathcal{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\chi_\nu(\alpha)\|_{L_2}=h^2\|[\hat{L}-E^j+h\mu]^{-1}z_3\|_{L_2}$$
$$\leqq h^2\|[\hat{L}-E^j+h\mu]^{-1}\|_{L_2}\cdot\|z_3\|_{L_2}$$

が成り立つかのいずれかである．ここに$\|\ \|_{L_2}$は$L_2[B^1]$におけるノルムを示す．点$E^j-h\mu$から作用素$\hat{L}$のスペクトルまでの距離をdとすれば，$\|[\hat{L}-E^j+h\mu]^{-1}\|_{L_2}\leqq 1/d$であるから，これより$d\leqq O(h^2)$を得，スペクトルの漸近式が得られた．

(3.2)式は摂動論に関する第1部補題2.4と合わせることにより作用素$\hat{L}$の幅$\Delta\lambda\sim o(h)$の区間に対するスペクトル函数$E_{\Delta\lambda}$の漸近形をも与えることに注意しよう．すなわち，

$$\|[1-E_{\Delta\lambda}]K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^j)}\sum_{\nu=1}^{r}\xi_\nu(\alpha)\chi_\nu(\alpha)\|_{L_2[B^1]}=O(h). \tag{3.3}$$

ここに

$$\Delta\lambda=\{\lambda^j-o(h),\lambda^j+o(h)\}.$$

以上で定理が証明された〔章末の訳注を見よ〕.

3. 定理4.4から定理3.1，3.6および3.6aが直ちに得られる．定理4.1，4.1a，4.2からは定理5.2a，5.3，5.5a，5.6aを考慮に入れれば，定理3.3および3.4(表2の第3，および第4の方程式に対するもの)が得られる．

双曲系に対しては空間B^∞として有限次元空間をとれば第4章§2の条件1が満たされることは明らかである．定理3.4(表2の第1および第2の方程式に対するもの)，3.5および4.3の条件から第4章§2の条件2がでることは知られている(Gårding[1]，Leray[1]，Courant[1]，Петровский[1]-[2]を見よ)．補章の補題2と定理3.4，3.5および4.3の条件から，対応する陪特性方程式のCauchy問題の解が任意の時間まで存在することがわかるから，結局定理3.4，3.5または4.3の条件のもとでは定理4.2の仮定はすべて満たされていることになる．

〔**訳注**〕 最後の推論では$\hat{L}$のいま考察中の固有値から残りのスペクトルまでの距離$\geqq O(h)$が用いられているようである．このことは次の2点に注意すればでてくる．1) $\hat{L}$の固有値がすべて定理の主張する漸近形を持つこと(すなわち定理の逆の主張が成り立つこと)．2) 量子化条件(4.1)を満たすエネルギー・レベルの間隔が$O(h)$であること．1)に関しては以下に略証を与える．2)については少し注意を要する．すなわち，エ

ネルギー・レベルの間隔は $-h^2\Delta+v(x)$ の形の作用素に対しても量子数の全域にわたっては必ずしも $O(h)$ と限らない．しかし $\lambda=E-h\mu+O(h^2)$ という書き方が順に第0近似項，第1近似項を与えるのは $E\sim\mathrm{const}$ という状況下においてであり，したがって量子化条件より $E\sim\varphi(nh)$ だから，このように量子数の大きいところではエネルギー・レベルの間隔は常に $\sim h\varphi'(nh)=O(h)$ となる．ところで1次元調和振動子に例をとって考えてみれば $E=(2n+1)h, n=0,1,2,\cdots$ であり，この各 E に対し $\mu=2m, m=0,\pm1,\pm2,\cdots$ なる輸送方程式 $R\chi=\mu\chi$ の固有値が存在する．したがって(故意に $\mu=0$ ととらぬ限り)第1項の誤差幅と第2項は h に関する微小度が対等で，また同一の固有値を近似する E,μ の組も一通りではない．したがって，1), 2)が示されてもなお $\hat{L}$ の相異なる固有値が $O(h^2)$ の差で接近して存在する恐れが残るが，この場合はこれらすべての固有値を取り込むように区間 $\Delta\lambda$ をとれば第1部の補題2.4の主張が ρ_{λ_0} を $E_{\Delta\lambda}$ に代えても成り立つことから問題はない．

1)の略証．$\hat{L}$ の固有値 λ と固有函数

$$u(x)=K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E)}[\mathscr{H}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha)\chi_\nu(\alpha) \tag{3.4}$$

とが与えられたとする．$u(x,t)=u(x)\exp(-i\lambda t/h)$ は初期値問題

$$\begin{cases}\left(-ih\dfrac{\partial}{\partial t}+\hat{L}\right)u(x,t)=0\\ u(x,0)=u(x)\end{cases}$$

の解であるから，定理4.1aにより(初期値問題の一意性も考慮して)

$$u(x,t)=K^{\tilde{r}_t,\alpha_t{}^0}_{1/h,\Gamma_t(E)}[\mathscr{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha,t)\chi_\nu(\alpha)$$

なる漸近形を持つ．ここに $\Gamma_t(E)$ は $u(x)\exp(-i\lambda t/h)$ に対応するLagrange多様体だから $\Gamma(E)$ と同一，したがって本文と同じ推論により

$$u(x,t)=\exp\left(-\frac{iEt}{h}\right)K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E)}[\mathscr{H}_t{}^0]\sum_{\nu=1}^{r}\varphi_\nu(\alpha,t)\chi_\nu(\alpha)$$

と書き直される．これと(3.4)の右辺に直接 $\exp(-i\lambda t/h)$ を掛けたものとを比較すれば(再び補題7.5を用いて)

$$\varphi_\nu(\alpha)\exp\left(-\frac{i\lambda t}{h}\right)=\varphi_\nu(\alpha,t)\exp\left(-\frac{iEt}{h}\right)\quad(\mathrm{mod}\,O(h))$$

したがって

$$\varphi_\nu(\alpha,t)=\varphi_\nu(\alpha)\exp\left\{-\frac{i}{h}(\lambda-E)t\right\}\quad(\mathrm{mod}\,O(h))$$

$R\varphi_\nu(\alpha,t)=0$ より

$$R\varphi_\nu+\frac{\lambda-E}{h}\varphi_\nu=0\quad(\mathrm{mod}\,O(h)).$$

ゆえに本文中と同様の推論で R が $\mu=-(\lambda-E)/h+O(h)$ の形の固有値を持つことがわかり，$\lambda=E-\mu h+O(h^2)$.

第8章　$[n/2]+4$ 回微分可能な係数をもつ量子力学の方程式の解に対する準古典的公式

大域的準古典近似の問題，すなわち粒子の軌道が交わる場合の取扱いは極めて難しく，この問題に解答を与えようとする物理的文献すらなかった．光学における類似の問題(波が焦点を通過する際の状況)は，部分的には研究されている(たとえば Ландау–Лифщиц ‘場の理論’ などに)．光学との類似からいうと，k 個の軌道が，時刻 t において点 x で交わるとき，これら k 個の波が互いに干渉していることになる．この干渉は本質的に $\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\gamma_j\right)$ (γ_j は j 番目の波に対応する)という因子で表現される．この考察は Groenewold[1] で行なわれた．また，そこには先験的には γ_j を推量することができないことが示されている．真空中における反射鏡に関する光学の問題では，γ_j は j 番目の光線が受ける反射数に依存する．

量子力学における方程式の漸近解に対しては，反射鏡の役を演ずるのは，まわりの古典粒子の軌道の集まりである．この場合，第2章で述べたように，γ_j は j 番目の軌道の Morse の指数に等しい．この指数は Morse により変分法の研究に際し導入されたもので，第2変分の負の固有値の数に等しい(Morse[1])．Morse の理論は微分位相幾何学，2点を結ぶ測地線の数に関する問題(大域変分法)に重要な役割を演じた(Milnor[1]，Seifert–Threlfall[1])．ここでは，Morse の指数が具体的物理的内容をもっていることを示す．この事実は Morse の理論の新しい進歩である．

前の章で γ_j の値を得たが，それが Morse の指数に等しいことは示していない．さらに係数は C^∞ 函数という仮定を要請した．前述の方法では，漸近第1項を求めるのにも十分な滑らかさを必要とした．γ_j が Morse の指数に等しくなるための係数の滑らかさの仮定をよりゆるやかなものにする問題は重要である．1次元の場合，係数が不連続であれば，γ_j が Morse の指数に等しくない例が作れる．この章では準古典近似公式の，本質的に前の章と異なる求め方を与える．新しい方法では係数の滑らかさに関する要請は，積分

$$I(h)=\int\varphi(x,y)\exp\left\{i\frac{F(x,y)}{h}\right\}dx$$

に対して，もし$(dF)(x_0)=0$かつ$(d^2F)(x_0)\neq 0$で，慣性指数をγとするとき

$$I(h)=(2\pi ih)^{n/2}|D|^{-1/2}\exp\left(-\frac{i\pi\gamma}{2}\right)\exp\{iF(x_0)\}\varphi(x_0)+z_h(y).$$

($z_h(y)$は$h\downarrow 0$のときL_2の意味で零となる項，Dは$d^2F(x_0)$のHesse行列式)が成り立つだけでよい．前の方法では，$\varphi(x,y), F(x,y)$に対して停留位相の方法で近似第2項が求まるような滑らかさを要した．

第6章で証明された前述の積分$I(h)$のhに関する漸近式は改良できるであろう．$\varphi(x,y)\in W^{[n/2]}(C^{[n/2]+1}$の代わりに)，$F(x,y)\in W^{[n/2]+3}(C^{[n/2]+4}$のかわりに)で多分よいであろう．この停留位相の方法の改良は，この章で述べられる定理の改良を意味する．

定理の証明は光学の波動方程式の場合にも一般化することができる．また係数をC^∞とすれば，漸近展開式の評価をC^∞クラスですることもできる．われわれは証明を第3章の方程式(2.1)で，表2の第1行から第4行までの係数をもつもの，すなわちKlein–Gordon–Фок–Dirac方程式に対して行なう．簡単のため，それをDirac方程式とよぶことにする．

§1 大域的漸近展開を得るための軌道に沿っての区分法

話を明確にするためにDiracの方程式に対するCauchy問題の解の漸近展開を考察しよう．初期条件$u(x,0,h)=y_1(x,h)$，$u_t(x,0,h)=y_2(x,h)$を満たす斉次Dirac方程式の解$u(x,t,h)$を$u(x,t,h)=\tilde{Q}_m{}^{-1}\{y_1,y_2,0\}$で表わした．$y_1(x,h)=\varphi(x)\exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\}$，ここで$\varphi(x)\in C_0{}^2$，$f(x\in C^2$，としよう．Dirac方程式に対する$1/h$-陪特性方程式を考察しよう．それは次の方程式である：

$$\dot{p}_i{}^{\pm}=-\frac{\partial H^{\pm}}{\partial x_i{}^{\pm}}\qquad \dot{x}_i{}^{\pm}=\frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i{}^{\pm}}\qquad (i=1,2,3)$$
$$\dot{s}_{\pm}=-H^{\pm}+\sum_{i=1}^{3}p_i{}^{\pm}\frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i{}^{\pm}}\tag{1.1}$$

$$H^{\pm}=H^{\pm}(x,p,t)=e\Phi(x,t)\mp c\sqrt{\left(p-\frac{e}{c}\mathcal{A}(x,t)\right)^2+m^2c^2}\tag{1.2}$$

$X^{\pm}(x_0,t)$，$P^{\pm}(x_0,t)$，$S_{\pm}(x_0,t)$でもって，方程式(1.1)の解で，初期条件

$$x^{\pm}(0)=x_0,\qquad p^{\pm}(0)=\operatorname{grad} f(x_0),\qquad s_{\pm}(0)=f(x_0) \tag{1.3}$$

を満たすものを表わす．$X^{\pm}(x_0,0,T)=\bigcup_{0\le t\le T}X^{\pm}(x_0,t)$ とおく．$(x_0,t_1),\cdots,(x_0,t_k)$ を軌道 $X^{+}(x_0,0,T)$ 上の焦点すなわち $DX/Dx_0=0$ なる点とする．$D_0=D_0(x_0,\varepsilon_\delta)$ を x_0 の ε-近傍であって，すべての $x_0\in D_0$ に対して $(x_0,t_1),\cdots,(x_0,t_k)$ の t に関する δ-近傍の外には焦点はなく，かつ δ-近傍の外においては各点を通る軌道は唯一つであるようなものを表わそう．さらに $D_t=\bigcup_{x_0\in D_0}X^{+}(x_0,t)$, $\Omega_t=\bigcup_{x_0\in D_0}P^{+}(x_0,t)$ $(0\le t\le T)$ とおく．次のような時間 Δt の存在は知られている（この後の §2 参照）：$H(x_0,p,t)$ の $\bigcup_{0\le t\le T}D_t\times\Omega_t$ における2階微分の最大値より決定され，$\bigcup_{0\le t\le T}\Omega_t$ のある近傍に属する同じ運動量をもつ $\bigcup_{0\le t\le T}D_t$ より出る軌道は時間 Δt の間は交わらない．$\Delta t\le(t_i-t_{i-1})/4$, $i=1,2,\cdots,k$, $t_0=0$ とする．$t_i'\in[t_i-\Delta t/2,t_i+\Delta t/2]$, $i=1,2,\cdots,k$ を任意に選ぶ．区間 $[0,T]$ を $t_0=0,t_1',t_1+\Delta t/4,t_2',t_2+\Delta t/4,\cdots,\ t_k',t_k+\Delta t/4,T$ と分割する（$t_k\le T\le t_k+\Delta t/4$ ならば $t_k+\Delta t/4$ は不要）．

$D_{0,i}=D_0(x_0,\varepsilon_\delta/i)\,(i=1,2,\cdots,k)$ とおく．$\delta_1=\min\{\delta,\Delta t/4\}$ とおく．$D_{t,i}$, $\Omega_{t,i}$ をそれぞれ $X^{+}(x_0,t)$, $P^{+}(x_0,t)$ による $D_{0,i}$ の像とする．区間 $[0,T]$ の分割法より，$t\le t_1'$ においては軌道 $X^{+}(x_0,0,t)$ は交わらない．すなわち，方程式 $X^{+}(x_0,t)=x$ は一意に解ける．$x_0=x_0{}^{+}(x,t)$ とし，$S^{+}(x,t)=S_{+}(x_0{}^{+}(x,t),t)$ とおく．

$u^{+}(x,t,h)$ を第5章§3の方程式で次の‘正’の条件を満たすものとする（第5章§4参照）：

$$u^{+}|_{t=0}=\varphi(x)\exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\} \tag{1.4 a}$$

$$ih\frac{\partial u^{+}}{\partial t}\bigg|_{t=0}=-\frac{\partial S^{+}}{\partial t}\bigg|_{t=0}\varphi(x)\exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\}+O(h) \tag{1.4 b}$$

$$\frac{\partial S^{+}}{\partial t}\bigg|_{t=0}=-H^{+}(x,\operatorname{grad} f(x),0)$$

$\varphi(x)$ の台は $D_{0,k}$ に含まれているとする．$0\le\tau\le t_1'$ において $J(x_0,\tau)$ は零とはならず，第5章公式(3.6 c), (3.6 d)を用いると，$h\downarrow 0$ のときの解 $u^{+}(x,t_1',h)$ は次の漸近表示式をもつ：

$$u^{+}(x,t_1',h)=u_0{}^{+}(x,t_1',h)+z(x,t_1',h) \tag{1.5}$$

ここで

$$u_0{}^+(x, t_1', h) = \frac{\exp\{(i/h)S_+(x_0, t_1')\}\sigma_+(x_0, t_1')}{\sqrt{J^+(x_0, t_1')}}\varphi(x_0)\Bigg|_{x_0=x_0{}^+(x,t_1')} \tag{1.6}$$

また $\sigma_+(x_0, t_1')$ については第5章(3.6b)を参照．(1.5)における $z(x, t_1', h)$ は $h\downarrow 0$ とともに $\|z(x, t_1', h)\|_{L_2}$ は零に近づく．(以下において，函数 $\xi(x, t, h)$ の L_2 ノルム $\|\xi(x, t, h)\|_{L_2}$ が $h\downarrow 0$ とともに零に近づくとき $o(1)$ でもって表わすことにする．)

函数 $B_{t_1'}(x)$ は C^∞ で，$\mathrm{supp}\, B_{t_1'} \subset D_{t_1', k-1}$ かつ $D_{t_1', k}$ 上で $B_{t_1'} \equiv 1$ であるとしよう．$u_0{}^+(x, t_1', h)$ の台は $D_{t_1', k}$ に含まれるから

$$\begin{aligned} u_0{}^+(x, t_1', h) &\equiv B_{t_1'}(x) u_0{}^+(x, t_1', h) \\ &\equiv B_{t_1'}(x) \Phi^{p_n} \Phi^{q_n} u_0{}^+(q, t_1', h) \end{aligned}$$

$u_0{}^+(p, t_1', h) = \Phi^{q_n} u_0{}^+(q, t_1', h)$ とおく．このとき次の補題が成り立つ．

補題 8.1 もし $p \notin \Omega_{t_1', k}$ であるならば，$\tilde{u}_0{}^+(p, t_1', h) = o(1)$.

証明 停留位相の方法を使って証明しよう．積分

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_0{}^+(p, t_1', h) \\ &= \frac{1}{(2\pi i h)^{n/2}} \int_{D_{t_1', k}} \left[J^+(x_0, t_1')^{-1/2} \sigma_+(x_0, t_1') \varphi(x_0) \exp\left\{\frac{i}{h} S_+(x_0, t_1')\right\}\right]_{x_0 = x^+(q, t_1')} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{ipq}{h}\right) dq \end{aligned}$$

の停留点 $q = q_0$ は方程式系

$$\frac{\partial S_+[x_0{}^+(q, t_1'), t_1']}{\partial q_i} = p_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

を満たす．一方，函数 $\varphi[x_0{}^+(q, t_1')]$ は $q \notin D_{t_1', k}$ ならば零である．$\partial S_+[x_0{}^+(q, t_1'), t_1']/\partial q_i = p_i{}^+[x_0{}^+(q, t_1'), t_1']$ による値域は $\Omega_{t_1', k}$ である．ゆえに補題の条件より函数 $S_+(x_0{}^+, t_1') - pq$ の停留点は積分領域には存在しない．補題 6.7 より結論を得る．

補題 8.1 より

$$u_0{}^+(x, t_1', h) \equiv B_{t_1'}(x) \Phi^{p_n} F_{t_1'}(p) \tilde{u}_0{}^+(p, t_1', h) + B_{t_1'}(x) o(1) \tag{1.7}$$

ここで $F_{t_1'}(p)$ は C^∞ で $\mathrm{supp}\, F_{t_1'}(p) \subset \Omega_{t_1', k-1}$ かつ $p \in \Omega_{t_1', k}$ ならば $F_{t_1'}(p) = 1$ となる函数である．(1.5)と(1.7)より

$$\begin{aligned} u^+(x, t_1', h) = \frac{1}{(2\pi h)^n} B_{t_1'}(x) \int_{\Omega_{t_1', k-1}} \exp\left(\frac{ipx}{h}\right) F_{t_1'}(p) dp \int_{D_{t_1', k}} \exp\left(-\frac{ipq}{h}\right) \\ \times u_0{}^+(q, t_1', h) dq + o(1). \end{aligned} \tag{1.8}$$

また，$\dfrac{\partial u^+}{\partial t}(x,t_1',h)$ に対しても

$$ih\frac{\partial u^+}{\partial t}=\frac{ih}{(2\pi h)^n}B_{t_1'}(x)\int_{\Omega_{t_1',k-1}}\exp\left(\frac{ipx}{h}\right)F_{t_1'}(p)dp$$
$$\times\int_{D_{t_1',k}}\exp\left(\frac{-ipq}{h}\right)\frac{\partial u_0{}^+}{\partial t}(q,t_1',h)dq+o(1)$$

を得る．$ih\dfrac{\partial u_0{}^+}{\partial t}=H^+u_0+o(1)$ であるから，

$$ih\frac{\partial u_0{}^+}{\partial t}=\frac{1}{(2\pi h)^n}B_{t_1'}(x)\int_{\Omega_{t_1',k-1}}\exp\left(\frac{ipx}{h}\right)F_{t_1'}(p)dp$$
$$\times\int_{D_{t_1',k}}\exp\left(-\frac{ipq}{h}\right)H^+(q,\nabla_qS^+,t_1')u_0{}^+(q,t_1',h)dq+o(1). \tag{1.9}$$

さて

$$\Phi_1(p,t_1',h)=\frac{F_{t_1'}(p)}{(2\pi ih)^{n/2}}\int_{D_{t_1',k}}\exp\left(-\frac{ipq}{h}\right)u_0{}^+(q,t_1',h)dq \tag{1.10 a}$$

$$\Phi_2(p,t_1',h)=\frac{1}{(2\pi ih)^{n/2}}\int_{D_{t_1',k}}\exp\left(-\frac{ipq}{h}\right)H^+(q,\nabla_qS^+,t_1')u_0{}^+(q,t_1',h)dq \tag{1.10 b}$$

としよう．$u(x,t,h)$ を，Dirac 方程式の解で，次の初期条件を満たすものとしよう．

$$u|_{t=t_1'}=u^+(x,t_1',h)=\frac{B_{t_1'}'(x)}{(-2\pi ih)^{n/2}}\int_{\Omega_{t_1',k-1}}\exp\left(\frac{ipx}{h}\right)\Phi_1(p,t_1',h)dp+o(1) \tag{1.11 a}$$

$$ih\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_1'}=ih\frac{\partial u^+(x,t_1',h)}{\partial t_1'}$$
$$=\frac{B_{t_1'}(x)}{(-2\pi ih)^{n/2}}\int_{\Omega_{t_1',k-1}}\exp\left(\frac{ipx}{h}\right)\Phi_2(p,t_1',h)dp+o(1) \tag{1.11 b}$$

作用素 $\tilde{Q}_m$ の定義と $\tilde{Q}_m{}^{-1}$ の存在から $t_1'\leqq t\leqq t_1+\Delta t/4$ において，解 $u(x,t,h)$ は次のように表現される：

$$u^+(x,t,h)=\tilde{Q}_m{}^{-1}\left\{u^+(x,t_1',h),ih\frac{\partial u^+}{\partial t_1'}(x,t_1',h),0\right\}$$
$$=\tilde{Q}_m{}^{-1}(-2\pi ih)^{-n/2}\int_{\Omega_{t_1',k-1}}B_{t_1'}(x)\exp\left(\frac{ipx}{h}\right)\{\Phi_1,\Phi_2,0\}\,dp+o(1).$$

ここで $\tilde{Q}_m{}^{-1}\{o(1),o(1),0\}=o(1)$ であることを用いた．$\tilde{Q}_m{}^{-1}$ を積分記号内に作

用させると

$$u^+\left(x, t_1+\frac{\Delta t}{4}, h\right) = (-2\pi ih)^{-n/2}\int_{\Omega_{t_1'}, k-1} u\left(x, p, t_1', t_1+\frac{\Delta t}{4}, h\right)dp+o(1) \tag{1.12}$$

を得る．$u(x, p, t_1', t_1+\Delta t/4, h)$ は，初期時刻 $t=t_1'$ において，初期条件

$$u|_{t=t_1'} = B_{t_1'}(x)\exp\left(\frac{ipx}{h}\right)\Phi_1(p, t_1', h), \tag{1.13 a}$$

$$ih\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_1'} = B_{t_1'}(x)\exp\left(\frac{ipx}{h}\right)\Phi_2(p, t_1', h) \tag{1.13 b}$$

を満たす Dirac 方程式の解の $t=t_1+\Delta t/4$ における値を示す．

$\varphi_1=B_{t_1'}(x)\Phi_1(p, t_1', h)$，$\varphi_2=B_{t_1'}(x)\Phi_2(p, t_1', h)$ とおくことにしよう．Hamilton の方程式系(1.1)の解で $t=t_1'$ において初期条件

$$x^\pm(t_1') = x_0, \qquad p^\pm(t_1')=p, \qquad s^\pm(t_1') = p\cdot x_0 \tag{1.14}$$

を満たすものを

$$x^\pm(t) = \tilde{X}^\pm(x_0, t), \qquad p^\pm(t) = \tilde{P}^\pm(x_0, t), \qquad s^\pm(t) = \tilde{S}_\pm(x_0, t)$$

としよう．$p\in\bigcup_{0\leqq t\leqq T}\Omega_t$ ならば，$\Delta t, t_1'$ の選び方より，$t_1'\leqq t\leqq t_1+\Delta t/4$ において

$$\tilde{J}^\pm(x_0, t) = \det\left\|\frac{\partial\tilde{X}^\pm(x_0, t)}{\partial x_0}\right\|$$

は正である．また軌道 $X^\pm(x_0, t)$ は $t_1'\leqq t\leqq t_1+\Delta t/4$ において交差しない．すなわち $X^\pm(x_0, t)=x$ は一意的に x_0 について解ける．$x_0=\tilde{x}_0{}^\pm(x, t)$，$\tilde{S}^\pm(x, t)=\tilde{S}_\pm(\tilde{x}_0(x, t), t)$ とおく．条件(1.13 a)，(1.13 b)を正負の条件に分けよう(第5章§4参照)，すなわち

$$\varphi_1 = \varphi^+(x, h)+\varphi^-(x, h), \qquad \varphi_2 = H^+\varphi^+(x, h)+H^-\varphi^-(x, h). \tag{1.15}$$

(1.13 a)，(1.13 b)および(1.15)より，$t_1'\leqq t\leqq t+\Delta t/4$ において

$$u(x, p, t_1', t, h) = \tilde{u}^+(x, p, t, h)+\tilde{u}^-(x, p, t, h) \tag{1.16}$$

が得られる．ここで $\tilde{u}^\pm(x, p, t, h)$ は $t=t_1'$ において条件

$$\left.\begin{aligned}\tilde{u}^\pm|_{t=t_1'} &= \varphi^\pm\exp\left(\frac{i}{h}px\right)\\ ih\frac{\partial\tilde{u}^\pm}{\partial t}\bigg|_{t=t_1'} &= \varphi^\pm H^\pm\exp\left(\frac{i}{h}px\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

を満たす Dirac の方程式の解である．条件(1.17)はわれわれが第5章§4で考

察した特別の場合，すなわち位相函数が $p\cdot x$ という場合である．第5章§3の結果を使うと

$$\tilde{u}^{\pm}\left(x,p,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)=\tilde{u}_0{}^{\pm}\left(x,p,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)+o(1) \tag{1.18}$$

$$\tilde{u}_0{}^{\pm}\left(x,p,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)$$
$$=\frac{\exp\left\{\dfrac{i}{h}\tilde{S}_{\pm}\left(\tilde{x}_0{}^{\pm},t_1+\dfrac{\Delta t}{4}\right)\right\}}{\left\{\tilde{J}^{\pm}\left(\tilde{x}_0{}^{\pm},t_1+\dfrac{\Delta t}{4}\right)\right\}^{1/2}}\tilde{\sigma}_{\pm}\left(\tilde{x}_0{}^{\pm},t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\varphi^{\pm}(\tilde{x}_0{}^{\pm},h). \tag{1.19}$$

$\tilde{\sigma}_{\pm}(\tilde{x}_0{}^{\pm},t_1+\Delta t/4)$ は $\sigma_{\pm}(x_0,t)$ において方程式 $\tilde{X}^{\pm}(x_0,t)=x$ を x_0 について解いて得られた $\tilde{x}_0{}^{\pm}=\tilde{x}_0{}^{\pm}(x,p,t_1+\Delta t/4)$ を代入した函数である．(1.12)(1.16)(1.18)より初期条件(1.11a),(1.11b)を満たす解の $t=t_1+\Delta t/4$ における値は

$$u^{+}\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)=(-2\pi ih)^{-n/2}\int_{\Omega_{t_1',k-1}}\left\{\tilde{u}_0{}^{+}\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)\right.$$
$$\left.+\tilde{u}_0{}^{-}\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)\right\}dp+o(1) \tag{1.20}$$

と表わされる．初期条件の選び方より，$u^{\pm}(x,t_1+\Delta t/4)$ は p と t_1' との函数でもある．

さて，$\varphi(t_1')$ を次のような非負値 C_0^{∞} 函数としよう：

$$\operatorname{supp}\varphi(t_1')\subset\left(t_1-\frac{\Delta t}{2},t_1-\frac{\Delta t}{4}\right)$$
$$\int_{t_1-\Delta t/2}^{t_1-\Delta t/4}\varphi(t_1')dt_1'=1.$$

$\varphi(t_1')$ を(1.20)式に掛けて積分すると，

$$u^{+}\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)$$
$$=(-2\pi ih)^{-n/2}\int_{t_1-\Delta t/2}^{t_1-\Delta t/4}\varphi(t_1')dt_1'\left\{\int_{\Omega_{t_1',k-1}}\left[\tilde{u}_0{}^{+}\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\tilde{u}_0{}^{-}\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)\right]dp\right\}+o(1) \tag{1.21}$$

を得る．(1.15)より

$$\varphi^{\pm}(x,h)=\pm\frac{H^{\mp}\varphi_1-\varphi_2}{H^{-}-H^{+}}. \tag{1.22}$$

ここで $H^{\pm}=H^{\pm}(x,p,t_1')$,

$$\varphi_1=\varphi_1(x,p,t_1',h)=(2\pi ih)^{-n/2}B_{t_1'}(x)F_{t_1'}(p)\int_{D_{t_1',k}}\exp\left(-\frac{ipq}{h}\right)u_0{}^+(q,t_1',h)dq \tag{1.23}$$

$$\varphi_2=\varphi_2(x,p,t_1',h)=(2\pi ih)^{-n/2}B_{t_1'}(x)F_{t_1'}(p)\times\int_{D_{t_1',k}}\exp\left(-\frac{ipq}{h}\right)H^+(q,\mathrm{grad}_qS^+(q,t_1'),t_1')u_0{}^+(q,t_1',h)dq. \tag{1.24}$$

積分

$$I^-\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)=(-2\pi ih)^{-n/2}\int_{t_1-\Delta t/2}^{t_1-\Delta t/4}\varphi(t_1')dt_1'\int_{\Omega_{t_1',k-1}}\tilde{u}_0{}^-\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)dp$$

を考察しよう．(1.19), (1.22)-(1.24), (1.6) より

$$\begin{aligned}I^-=&(2\pi h)^{-n}\int_{t_1-\Delta t/2}^{t_1-\Delta t/4}\varphi(t_1')\int_{\Omega_{t_1',k-1}}F_{t_1'}(p)\int_{D_{t_1',k}}\left(\tilde{J}^-\left(\tilde{x}_0{}^-,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right)^{-1/2}\\&\times\tilde{\sigma}_-\left(\tilde{x}_0{}^-,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\\&\times B_{t_1'}(\tilde{x}_0{}^-)\exp\left\{\frac{i}{h}\tilde{S}^-\left(\tilde{x}_0{}^-,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right\}\frac{-H^+(q,\mathrm{grad}_qS^+(q,t_1'),t_1')+H^+(\tilde{x}_0,p,t_1')}{H^-(\tilde{x}_0{}^-,p,t_1')-H^+(\tilde{x}_0{}^-,p,t_1')}\\&\times\exp\left\{\frac{i}{h}S_+[x_0{}^+,t_1']\right\}(J(x_0{}^+,t_1'))^{-1/2}\sigma_+(x_0{}^+,t_1')\varphi(x_0{}^+)\Big|_{\substack{x_0{}^+=x_0{}^+(q,t_1')\\ \tilde{x}_0{}^-=\tilde{x}_0{}^-(x,t_1+\Delta t/4)}}\\&\times\exp\left(-\frac{ipq}{h}\right)dpdqdt_1'\end{aligned} \tag{1.25}$$

が導かれる．I^- を計算するために停留位相の方法を用いよう．$q=q^0, p=p^0$, $t_1'=\tilde{t}$ を停留点とすると，それは方程式系

$$\mathrm{grad}_qS_+[x_0{}^+(q,t_1'),t_1']=p,\qquad \mathrm{grad}_p\tilde{S}^-\left[x_0{}^-,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right]=q \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial\tilde{S}^-\left(x,t_1+\dfrac{\Delta t}{4}\right)}{\partial t_1'}=-\frac{\partial S^+(q,t_1')}{\partial t_1'} \tag{1.27}$$

を満たす．$\tilde{S}^-(x,t_1+\Delta t/4)$ と $S^+(q,t_1')$ の定義より

$$\frac{\partial S^+(q,t_1')}{\partial t_1'} = -H^+(q, \mathrm{grad}_q S^+(q,t_1'), t_1')$$
$$\frac{\partial \tilde{S}^-\left(x, t_1+\dfrac{\Delta t}{4}\right)}{\partial t_1'} = H^-(\tilde{x}_0^-, p, t_1') \tag{1.28}$$

(1.26)-(1.28) より

$$H^-(\tilde{x}_0^-, p, t_1') = H^+(\tilde{x}_0^-, p, t_1').$$

ところが特性根は異なっているという条件があるのでこのことは起こりえない．補題 6.7 より

$$I^-\left(x, t_1+\frac{\Delta t}{4}, h\right) = o(1)$$

を得る．

さて，次に函数 $I^+(x, t_1+\Delta t/4, h)$ を考察しよう：

$$I^+\left(x, t_1+\frac{\Delta t}{4}, h\right) = (-2\pi i h)^{-n/2}\int_{t_1-\Delta t/2}^{t_1-\Delta t/4}\varphi(t_1')\int_{\Omega_{t_1',k-1}}\tilde{u}_0^+\left(x, t_1+\frac{\Delta t}{4}, h\right)dp\,dt_1'.$$

(1.19), (1.22)-(1.24), (1.6) を用いてより詳しく書くと

$$I^+ = \int_{t_1-\Delta t/2}^{t_1-\Delta t/4}\varphi(t_1')\tilde{I}^+(t_1')dt_1'. \tag{1.29}$$

ここで

$$\begin{aligned}\hat{I}^+(t_1') &= (2\pi h)^{-n}\int_{\Omega_{t_1',k-1}}F_{t_1'}(p)\int_{D_{t_1',k}}\left(\tilde{J}^+\left(\tilde{x}_0^+, t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right)^{-1/2}\tilde{\sigma}_+\left(\tilde{x}_0^+, t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\\
&\times B_{t_1'}(\tilde{x}_0)\exp\left\{\frac{i}{h}\tilde{S}_+\left(\tilde{x}_0^+, t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right\}\left[\frac{H^-(\tilde{x}_0^+, p, t_1')-H^+(q, \nabla_q S^+(q,t_1'), t_1')}{H^-(\tilde{x}_0^+, p, t_1')-H^-(\tilde{x}_0^+, p, t_1')}\right]\\
&\times\exp\left\{\frac{i}{h}S_+(x_0^+, t_1')\right\}\sigma_+(x_0^+, t_1')(J^+(x_0^+, t_1'))^{-1/2}\varphi(x_0^+)\Big|_{\substack{x_0^+=x_0^+(q,t_1')\\ \tilde{x}_0^+=\tilde{x}_0^+(x,t_1+\Delta t/4)}}\\
&\times\exp\left(-\frac{i}{h}pq\right)dp\,dq\end{aligned} \tag{1.30}$$

$\tilde{I}^+$ を計算するために停留位相の方法を用いよう．(1.30) の停留点を求める方程式系は以下である：

$$\mathrm{grad}_q S_+[x_0^+(q,t_1'), t_1'] = p, \qquad \mathrm{grad}_p\tilde{S}_+\left(\tilde{x}_0^+, t_1+\frac{\Delta t}{4}\right) = q. \tag{1.31}$$

$x = X^+(\bar{x}_0,\ t_1+\Delta t/4), x_0 \in D_0$ とし，$q^0 = X^+(\bar{x}_0, t_1')$, $p^0 = P^+(\bar{x}_0, t_1')$ とおく．そのとき $x_0^+(q^0, t_1') = x_0^+(X^+(\bar{x}_0, t_1'), t_1') \equiv \bar{x}_0$ である．$S_+(x_0^+(q,t_1'), t_1')$ と $\tilde{S}_+(\tilde{x}_0^+,$

$t_1+\Delta t/4)$ の定義より

$$\mathrm{grad}_q S_+(x_0{}^+(q,t_1'),t_1') = P^+(x_0{}^+(q,t_1'),t_1'),$$

$$\mathrm{grad}_p \tilde{S}_+\left(\tilde{x}_0{}^+, t_1+\frac{\Delta t}{4}\right) = \tilde{X}^+(\tilde{x}_0{}^+,t_1') = \tilde{x}_0{}^+.$$

$p^0=P^+(\bar{x}_0,t_1')$ であるから，$\tilde{x}_0{}^+=X^+(\bar{x}_0,t_1')$ であり，また方程式系(1.31)は恒等的に満たされる．したがって，$t_1'\leqq t\leqq t_1+\Delta t/4$ において $\tilde{X}^+(\bar{x}_0{}^+,t)=X^+(\bar{x}_0,t)$ である．結局，$\bar{x}_0(x,t_1+\Delta t/4)$ を $X^+(\bar{x}_0,t_1+\Delta t/4)=x$ の解とすると，$x_0{}^+(q^0,t_1')=\bar{x}_0(x,t_1+\Delta t/4)$ である．したがって，

$$q^0 = X^+\left(\bar{x}_0\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right),t_1'\right),\qquad p^0 = P^+\left(\bar{x}_0\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right),t_1'\right),$$

$$\tilde{X}^+(\tilde{x}_0{}^+,t) = X^+\left(\bar{x}_0\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right),t\right),\qquad t_1'\leqq t\leqq t_1+\frac{\Delta t}{4}. \tag{1.32}$$

等式(1.32)と点$(\bar{x}_0,t_1+\Delta t/4)$が焦点でないことから，十分小さい領域 $D_{0,k}$ の中には停留点(q_0,p_0)は唯一つであることがわかる．もしそうでなければ十分近い軌道が x で交わり，x は焦点となってしまう．明らかに(Маслов[1])

$$S^+\left(x,q,t_1',t_1+\frac{\Delta t}{4}\right) = \tilde{S}^+\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)-pq\ ^{1)}.$$

ここで $p=p(x,q,t_1',t_1+\Delta t/4)$ は $\mathrm{grad}_p\tilde{S}_+(\tilde{x}_0{}^+,t_1+\Delta t/4)=q$ の解である．ゆえに

$$S_+[x_0{}^+(q^0,t_1'),t_1']-p^0q^0+\tilde{S}_+\left(q^0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right) = S_+\left[\bar{x}_0\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right),t_1+\frac{\Delta t}{4}\right].$$

停留位相の方法を用いて

$$\begin{aligned}\hat{I}^+ = {}& \exp\frac{i\pi\delta}{4}\left|\det\begin{Vmatrix} A & -E\\ -E & B\end{Vmatrix}\right|^{-1/2}\left(\tilde{J}^+\left(q^0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right)^{-1/2}\\ &\times\tilde{\sigma}_+\left(q^0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\varphi(\bar{x}_0)\sigma_+(\bar{x}_0,t_1')(J^+(\bar{x}_0,t_1'))^{-1/2}\\ &\times\exp\left\{\frac{i}{h}S_+\left(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right\}\Bigg|_{\substack{q^0=X^+(\bar{x}_0,t_1')\\ \bar{x}_0=\bar{x}_0(x,t_1+\Delta t/4)}}+o(1)\end{aligned} \tag{1.33}$$

を得る．ここで δ は行列

---

1)〔訳注〕　この式の左辺は $t=t_1$ において $X(t_1)=q$, $P(t_1)=p=p(x,q,t_1',t_1+\Delta t/4)$, $S(t_1)=0$ を満たす Hamilton の方程式系の解より構成される函数で，$x=X(t,q,t_1)|_{t=t_1+\Delta t/4}$ とおいたときの $S(t,q,t_1')|_{t=t_1+\Delta t/4}$ の値を $S^+(x,q,t_1',t_1+\Delta t/4)$ としたものである．

$$C=\left\|\begin{matrix} A & -E \\ -E & B \end{matrix}\right\|,\qquad \text{ここに,} \tag{1.34}$$

$$A=\left\|\frac{\partial^2 S_+(x_0{}^+(q,t_1'),t_1')}{\partial q_i \partial q_j}\right\|_{q=X^+(\bar{x}_0,t_1')},$$

$$B=\left\|\frac{\partial^2 \tilde{S}_+\left(\tilde{x}_0{}^+,t_1+\dfrac{\Delta t}{4}\right)}{\partial p_i \partial p_j}\right\|_{\substack{\tilde{x}_0{}^+=X_0{}^+(\bar{x}_0,t_1') \\ p=P^+(\bar{x}_0,t_1')}},\quad E=\|\delta_{ij}\|$$

の符号数である.

$\sigma_+(x_0,t)$ と $\tilde{\sigma}_+(\tilde{x}_0,t)$ の定義(第5章§3)および等式(1.32)より

$$\sigma_+(\bar{x}_0,t_1')=\sqrt[4]{\frac{c^2-[\dot{X}^+(\bar{x}_0,t_1')]^2}{c^2-[\dot{X}(\bar{x}_0,0)]^2}}\exp\left\{\frac{i}{2mc^2}\int_0^{t_1'} R^+(\bar{x}_0,t)\sqrt{1-\beta^2}\,dt\right\} \tag{1.35}$$

$$\tilde{\sigma}_+\left(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)=\sqrt[4]{\frac{c^2-[\dot{X}^+(\bar{x}_0,t_1+\Delta t/4)]^2}{c^2-[\dot{X}^+(\bar{x}_0,t_1')]^2}}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{2mc^2}\int_{t_1'}^{t_1+\Delta t/4} R^+(\bar{x}_0,t)\sqrt{1-\beta^2}\,dt\right\}. \tag{1.36}$$

したがって，後述の等式(2.34)(§2)を用いると,

$$\hat{I}^+=\exp\left(\frac{i\pi\delta}{4}\right)\left(J^+\left(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right)^{-1/2}\varphi(\bar{x}_0)\sqrt[4]{\frac{c^2-[\dot{X}^+(\bar{x}_0,t_1+\Delta t/4)]^2}{c^2-[\dot{X}^+(\bar{x}_0,0)]^2}}$$
$$\times\exp\left\{i\frac{1}{2mc^2}\int_0^{t_1+\Delta t/4} R^+(\bar{x}_0,t)\sqrt{1-\beta^2}\,dt+\frac{i}{h}S_+\left(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right\}$$
$$+o(1) \tag{1.37}$$

を得る. Δt と t_1' の選び方より，行列 c に対応する2次形式の符号は t_1' に依らない. (1.29)と(1.21)より

$$u\left(x,t_1+\frac{\Delta t}{4},h\right)=\exp\left(\frac{i\pi\delta}{4}\right)\exp\left\{\frac{i}{h}S_+\left(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right\}\left[J^+\left(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\right]^{-1/2}$$
$$\times\sigma_+\left(\bar{x}_0,t_1+\frac{\Delta t}{4}\right)\varphi(\bar{x}_0)+o(1),\qquad \bar{x}_0=\bar{x}_0(x,t_1+\Delta t/4) \tag{1.38}$$

が導かれる.

われわれは次の節で $\delta/2$ が Jacobi 行列式 J の $t=t_1'$ における零点の位数に等しいことを証明する.

さて，次に $t=t_1+\Delta t/4$ において Dirac の方程式に公式(1.38)から導かれる初期値を与える．仮定より区間$[t_1+\Delta t/4, t_2']$には焦点がないので，第5章の漸近展開式を応用することができる．かくして，時刻 $t=t_2'$ における漸近展開式を得る．$t=t_2'$ において Dirac 方程式に対して初期値を与え，前述の方法で $t=t_2+\Delta t/4$ における漸近展開式を得る．この過程をくりかえすことにより，$t=T$ における漸近展開式を得る．それは(1.38)において $t_1+\Delta t/4$ を T で，δ を(-2)倍の Morse 指数で置きかえた式である．もし(x_0, T)が焦点であるならば，時刻 $t=t_k'$ までは前述の議論をくりかえし，最後の段階 t_k' から T への段階において次のように議論を変える．$\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_k, \tilde{x}_{k+1}, \cdots, \tilde{x}_n$ を(x_0, T)における焦点座標とする．$\hat{I}^+=u+o(1)$ であるから $\Phi^{\tilde{x}_n}\hat{I}^+=\Phi^{x_n}u+o(1)$ である．まず方程式の係数を C^∞ と仮定しよう．第7章ですでに示されているように，このとき $\Phi^{\tilde{x}_n}u$ は

$$F_1(\tilde{y}_k, T)\exp\left\{\frac{i}{h}F_2(\tilde{y}_k, T)\right\}$$

なる漸近形をもつ．ここで $F_1, F_2\in C^\infty$ かつ $\mathrm{supp}\,F_1$ は有界である．したがってこの場合は

$$u=\Phi^{\tilde{p}_k}F_1(\tilde{y}_k, T)\exp\left\{\frac{i}{h}F_2(\tilde{y}_k, T)\right\}+o(1)$$

と表わされる．係数が $C^{[n/2]+4}$ のときは，C^∞ の場合から閉包移行することにより得られる．

Cauchy 問題における時間の反転性により，時刻 $t=T$ において初期値

$$\Phi^{\tilde{p}_k}F_1(\tilde{y}_k, T)\exp\left\{\frac{i}{h}F_2(\tilde{y}_k, T)\right\}$$

を与えたとき，時刻 $t=0$ における解の漸近形は(1.4 a),(1.4 b)の表現となる．また $t=-t_0$ が焦点で，そこにおける焦点座標が $\tilde{\tilde{y}}_{k_1}=(\tilde{\tilde{p}}_1, \cdots, \tilde{\tilde{p}}_{k_1}, \tilde{\tilde{q}}_{k_1+1}, \cdots, \tilde{\tilde{q}}_n)$ であるならば，そこでの漸近形は

$$\Phi^{\tilde{p}_{k_1}}\tilde{F}_1(\tilde{\tilde{y}}_{k_1}, -t_0)\exp\left\{\frac{i}{h}\tilde{\tilde{F}}_2(\tilde{\tilde{y}}_{k_1}, -t_0)\right\}$$

となる．以上により，定理3.4で与えられている第1項は $o(1)$ の誤差をもって，これも $C^{[n/2]+4}$ の場合に一般化できる．ゆえに定理3.2–3.3の型の定理が Klein–Gordon-Фок の方程式，および Dirac の方程式に対し成り立つ．同様の

ことはSchrödingerの方程式，Pauliの方程式に対しても成り立つ．これらの違いは与える初期条件の数だけである．

ところでこの証明にさいして，Dirac方程式の解のL_2ノルムが右辺の函数のノルムの$1/h$倍で評価できるという事実のみを用いた．同じような評価は第1部補題4.1の評価式より，tに連続的に依存する自己共役作用素$A(t)$に対する発展方程式

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}-A(t)\psi = F(t)$$

の解に対しても成り立つことは明らかであろう．実数値函数$H(p,x,t)$に対して，次のような作用素を対応させることができる：

$$\hat{H}(\hat{p},x,t)\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int\exp\left\{\frac{i}{h}\sum_{i=1}^{n}p_i'x_i\right\}dp'$$
$$\times\int\exp\left\{-\frac{i}{h}\sum_{i=1}^{n}p_i'x_i'\right\}H(p',x',t)\varphi(x')dx'.$$

もし$H(p,x,t)$が十分滑らかであれば，作用素$H(\hat{p},x,t)$は発展方程式の生成作用素となり，補題6.1および定理6.1と同様にして

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}-\hat{H}(\hat{p},x,t)\psi=0$$

$$\psi|_{t=0}=\varphi(x)\exp\left\{\frac{i}{h}f(x)\right\},\qquad \varphi(x)\in C_0^\infty$$

の解のt小なる時刻のL_2漸近形を得る．軌道に沿う区分法は$H(p,x,t)$が滑らかという条件のもとでこの場合にも応用でき，(1.38)と同様の公式を焦点でない点において任意の時刻Tについて得ることができる．

さらに，軌道に沿う区分法で得られた定数δが条件

$$\sum_{i,j=1}^{n}H_{p_ip_j}z_iz_j>0,\qquad z\neq 0 \tag{1.39}$$

のもとでは(-2)倍のMorseの指数に等しいことを示す．第7章での結果より，第2章§2において導入されたR_t上の道に対する指数は，条件(1.39)のもとでは4を法としてMorseの指数に等しいことが示される．

§2 Hamiltonの方程式の解に関する補助的な補題

1° 予備的考察

この節では次のMorseの定理を本質的に使う.

'$H(p,q,t)$は十分滑らかな函数で, $z\neq 0$に対して$\sum_{i,j} H_{p_ip_j}z_iz_j>0$と仮定する. そのとき$J=\det\|\partial X_i(\alpha,t)/\partial\alpha_j\|$の零点$t=t_0$における重複度は行列$\|\partial X_i/\partial\alpha_j\|$の退化次数に等しい'.

これから有限区間に存在する軌道の焦点の数は有限個であることが導かれる. ゆえに任意の固定した点(x_0,t)においてεを十分小さくとれば, 行列

$$c(t,\varepsilon)=\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t-\varepsilon)}{\partial x_{0j}}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t+\varepsilon)}{\partial x_{0j}}\right\|^{-1}$$

が存在する. この行列$c(t,\varepsilon)$の固有値を$\lambda_i(t,\varepsilon)(i=1,2,\cdots,n)$で表わす.

この行列$c(t,\varepsilon)$を用いて軌道$X(x_0,0,T)$の新しい指数γを

$$\gamma=\underset{0<t\leqq T}{\mathrm{var}}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(\varepsilon,t)/|\lambda_i(\varepsilon,t)|)$$

でもって定義しよう[1]. 補題8.7で公式(1.38)の位相乗数(phase multiplier)が$\exp\left(\frac{i\pi}{4}\gamma\right)$に等しいことを示す. 補題8.8で$\gamma$とMorseの指数との関係を示す. 補題8.7は波動方程式の陪特性帯に対しても適用されるように証明される. 波動方程式のHamilton函数は正定値性の条件(1.39)を満たしていない. 前節で述べた区分法は軌道に沿っての焦点の数が有限という条件のもとで波動方程式の場合にも適用できることを注意しておく. よって同じ仮定のもとにここで導入された指数の概念は波動方程式の解の漸近形の計算にも用いることができる.

補題8.7, 8.8の証明にはHamilton系の境界値問題の解の評価, Hamilton-Jacobiの方程式の解の導函数の評価を必要とするので, 補題8.2, 8.5でそれを行なう. 補題8.3では相対論的Hamilton函数が条件(1.39)を満たすことを示す.

補題8.2で次のトポロジーの定理を使う.

'$\overline{T}^n$を$\boldsymbol{R}^n$内の閉球とする. C,C'を$\overline{T}^n$から$\boldsymbol{R}^n$への連続写像で, ともに$\overline{T}^n$上有限個の不動点しか持たず, かつそれらは開球T^nに属すると仮定する. こ

1) 〔訳注〕 このvarの意味は通常と異なる(補題8.7の証明を見よ).

のとき $\bar{T}^n$ の境界上の任意の点 p に対して

$$\rho(Cp, C'p) \leqq \rho(Cp, p) \qquad (\rho(p, p')\text{は距離})$$

が成り立つならば，C と C' の不動点の代数的指数は等しい'.

2° 解の個数の奇数性

補題 8.2[1]　$x_i(t), y_i(t)\ (i=1, 2, \cdots, n)$ は次の方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= F_i(x, y, t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \dot{y}_i &= f_i(x, y, t) \qquad x = (x_1, \cdots, x_n),\quad y = (y_1, \cdots, y_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

および境界条件

$$x_i(0) = x_i{}^0, \qquad y_i(t_1) = y_i{}^0(x(t_1)) \tag{2.2}$$

を満たしているとする．函数 $F_i(x, y, t)$，$f_i(x, y, t)$，$y_i{}^0(x)$ は条件

$$F_i(x, y, t) \leqq c_1, \qquad f_i(x, y, t) \leqq c_2, \qquad \left|\frac{\partial y_i{}^0}{\partial x_j}\right| \leqq c_3 \tag{2.3}$$

を

$$|x_i| \leqq |x_i{}^0 + b|, \qquad |y_i| \leqq |y_i{}^0| + (n+1)a, \qquad 0 \leqq t \leqq T \tag{2.4}$$

において満たしているとする．ここで a, b, T は正のある定数[2]．このとき $t_1 \leqq \min\{b_1/c, a/(c_2+c_1c_3n), T\}$ における解の個数は重複度をこめて奇数あるいは無限である[3]．かつこのとき，これらの解は評価式

$$\max|x_i(t) - x_i{}^0| \leqq b, \qquad \max|y_i(t) - y_i{}^0(x(t_1)| \leqq (n+1)a \tag{2.5}$$

を満たす．

---

1)〔訳注〕　この補題は必ずしも要らない．補題 8.5 はこれを用いないで示せる．

2)　条件(2.4)の代わりに，解 $x(t), y(t)$ に対して先験的評価(2.3)が成立すると仮定することができる．そのとき，任意の有限時刻 t に対して重複度をこめて奇数または無限個の(2.1)，(2.2)に対応する解が存在する．Hamilton 方程式に対しては非常に一般的な制限のもとに(補足参照)運動量に対する先験的評価，したがって(2.1)の右辺に対する評価が得られる．このような問題は一端は固定し，他端を横断的(transversal)なる条件で Lagrange 函数に対する積分の極値を求めるものに対応している(Morse[1])．

したがって，補足における補題1の条件のもとでは(2.1)，(2.2)に対応する変分問題の極値は重複度をこめて奇数または無限である．同様の結果は両端固定問題に対しても得られる．

最後の場合における解の個数の奇数性はある仮定のもとで Бернштейн[1]において示されている．

3)　$c_1 = b^{1-\delta}\ (1>\delta>0)$，$c_2 = c(b)$，$a = b[c(b)+1]$，$b = t_1{}^{1/\delta}$ とおけば次の結果を得る：

系　$F_i(x, y, t)$，$f_i(x, y, t)$ は連続で条件

$$|F_i(x, y, t)| \leqq c|x|^{1-\delta}, \qquad |f_i(x, y, t)| \leqq c(y), \qquad a\left|\frac{\partial y_i{}^0}{\partial x_j}\right| \leqq c_3$$

を満たすとする．ここで $c(y)$ は連続函数である．このとき，問題(2.1)，(2.2)の解の個数は任意の有限時刻 t_1 に対して奇数か無限である．

証明[1] 変数変換

$$z = x - x^0,\qquad u = y - y^0(x) = y - y^0(z+x^0) \tag{2.6}$$

により，問題は

$$\frac{dz_i}{dt} = F_i(z+x^0, u+y^0, t), \tag{2.7}$$

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(z+x^0, u+y^0, t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i{}^0}{\partial x_k}(z+x^0) F_k(z+x^0, y^0+u, t),$$

$$z(0) = 0, \qquad u(t_1) = 0, \qquad y^0 = y^0(z+x^0) \tag{2.8}$$

に変換される．まず，方程式(2.7)に対するCauchy問題の解で，初期条件

$$z(0) = 0, \qquad u(0) = u^0 \tag{2.9}$$

を満たすものを考えよう．さらに

$$|z_i| \leqq b, \qquad |u_i - u_i{}^0| \leqq a, \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i{}^0|^2} \leqq na \tag{2.10}$$

とする(これより $|u_i| \leqq (n+1)a$)．存在定理より

$$0 \leqq t \leqq \min\left\{\frac{b}{c_1},\ \frac{a}{c_2+c_1c_3n},\ T\right\}$$

において，Cauchy問題(2.7)-(2.9)は条件(2.10)を満たす解をもち，それは$u_i{}^0$の連続函数である(Петровский[3])．球$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i{}^0)^2} \leqq na$内の点$\tilde{u}^0$で$u(0)=\tilde{u}_0$, $u(t_1) \equiv \tilde{u}(\tilde{u}_0, t_1) = 0$となるものがあることを証明しよう．まず第1の写像$C$として恒等的零写像すなわち$C(p)=0$をとる．第2の写像$C'$として$C' = u^0 - u(u^0, t_1)$をとる．点$p$が球の境界点であるとすると$\rho(Cp, p) = na$．一方(2.10)より

$$\rho(C'p, Cp) = \rho(C'p, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i{}^0 - u_i(u^0, t_1))^2} \leqq na.$$

Cはただ一つの不動点をもつので，前述のトポロジーの定理よりC'の不動点の数は∞か，あるいはその代数的指数は1に等しい．よってC'の不動点の数は奇数個あるいは無限である．$\tilde{u}_0$を不動点とすると

$$\tilde{u}_0 - u(\tilde{u}_0, t_1) = \tilde{u}_0.$$

よって$u(\tilde{u}_0, t_1) = 0$．補題の主張は示された．

---

1) もし$\det\|\partial X_i/\partial x_j{}^0\| \neq 0$ならば解$X(x_0, t)$の重複度は1に等しい．

3° 解の評価

補題 8.3　$H^{\pm}(x,p,t)=-\Phi(x,t)\mp c(x,t)\sqrt{[p-\mathscr{A}(x,t)]^2+m^2c^2(x,t)}$ とする．そのとき行列

$$\mp\left\|\frac{\partial^2 H^{\pm}}{\partial p_i \partial p_j}\right\|$$

は，$m\neq 0$ ならば正定値，$m=0$ であれば非負定値である[1]．

証明　$F(H,p,x,t)=[H+\Phi(x,t)]^2-c^2(x,t)[p-\mathscr{A}(x,t)]^2-m^2c^4(x,t)$ とおく．そのとき

$$\frac{\delta F(H,p,x,t)}{\delta p_i}=\frac{\partial F}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial F}{\partial p_i}=0. \tag{2.11}$$

よって

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=-\frac{\partial F}{\partial p_i}\Big/\frac{\partial F}{\partial H}. \tag{2.12}$$

また

$$\frac{\delta^2 F}{\delta p_i \delta p_j}=\frac{\partial^2 F}{\partial H^2}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}+\frac{\partial F}{\partial H}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}+\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}=0.$$

(2.12)を代入すると

$$2\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial p_j}\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)^{-2}+\frac{\partial F}{\partial H}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}-2c^2(x,t)\delta_{ij}=0.$$

したがって，$P=p-\mathscr{A}(x,t)$ とすれば

$$\pm\{\sqrt{c^2(x,t)|P|^2+m^2c^4(x,t)}\}^3\left\|\frac{\partial^2 H^{\pm}}{\partial p_i \partial p_j}\right\|=c^4(x,t)\|\{P_iP_j-[P^2+m^2c^2]\delta_{ij}\}\|$$

を得る．ところで行列

$$\|P_iP_j\|=\left\|\begin{matrix}P_1{}^2 & P_1P_2 & \cdots & P_1P_n\\ P_2P_1 & P_2{}^2 & \cdots & P_2P_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ P_nP_1 & P_nP_2 & \cdots & P_n{}^2\end{matrix}\right\|$$

においてすべての行は1次従属であるから，その階数は1である．すなわちこの行列は$(n-1)$個の零固有値をもつ．その特性多項式は $\lambda^n-\alpha\lambda^{n-1}=0$，$\alpha=|P|^2$ である．よって行列 $\|P_iP_j\|$ から行列 $\{|P|^2+m^2c^2(x,t)\}E$ を差し引いた行列は，$m\neq 0$ ならば負定値，$m=0$ ならば非正定値である．

1)　この場合その行列式は0に等しく，その他の主小行列式がすべて正となる．

補題 8.4　Hamilton 函数 $H^+(x,p,t,m)$ において $m=0, \Phi=0, A=0$ とする．そのとき，もし $S(x,t)$ が Hamilton–Jacobi の方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H^+(x,\nabla_x S,t,0)=0$$

および初期条件

$$S|_{t=0}=p\cdot x \qquad (p\neq 0)$$

を満たしているならば

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S(x,p,t)}{\partial p_i\partial p_j}\right\|\equiv 0 \tag{2.13}$$

である．

証明　作用 $S(x,p,t)$ に対して

$$\frac{dS}{dt}=-H^+ +\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial H^+}{\partial p_i}=0$$

であり，$S|_{t=0}=p\cdot x$ であるから

$$S(x,p,t)=\sum_{k=1}^n p_k\cdot x_{0,k}(x,p,t)$$

となる．したがって

$$\frac{\partial S}{\partial p_i}=x_{0,i}+\sum_{k=1}^n p_k\frac{\partial x_{0,k}}{\partial p_i}.$$

一方，Hamilton–Jacobi の理論より

$$\frac{\partial S}{\partial p_i}=x_{0,i}. \tag{2.14}$$

よって

$$\sum_{k=1}^n p_k\frac{\partial x_{0,k}}{\partial p_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

$p\neq 0$ ゆえ $\det\|\partial x_{0,k}/\partial p_j\|=0$．(2.14) から (2.13) は導かれる．

われわれは以下において次の二つの場合を考える．

A)　Hamilton 函数 $H(x,p,t)$ が条件 (1.39) を満足する．

B)　Hamilton 函数が $c(x,t)|p|$ という形である．

これから述べる結果は特に断らない限りこれらの場合に対応するものである．

$\tilde{S}(x,p^0,t_1,t)$ でもって次の Hamilton–Jacobi の方程式の解を表わそう：

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}+H(x, \nabla_x \tilde{S}, t)=0$$

$$\tilde{S}|_{t=t_1}=p^0\cdot x.$$

また $S(x_0, t)$, $X(x_0, t)$, $P(x_0, t)$ でもって常微分方程式系

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\qquad \dot{s}=H-\sum_{i=1}^n p_i H_{p_i}$$

$$x(0)=x_0,\qquad p(0)=\mathrm{grad}\, f(x_0),\qquad s(0)=f(x_0)$$

の解を表わす.

方程式 $X(x_0, t)=x$ の解を $x_0=x_0(x, t)$ と表わすことにする. 以下において E は単位行列を表わす.

補題 8.5

$$|x_i|\leqq a,\qquad |p_i{}^0|\leqq b \tag{2.15}$$

とする. そのとき十分小さい ε に対して $|t-t_1|<\varepsilon$ ならば

$$\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}(x, p^0, t_1, t)}{\partial x_i \partial p_j{}^0}\right\|=E+D(\varepsilon) \tag{2.16}$$

と表わされる. ここで $D(\varepsilon)$ は $\varepsilon\to 0$ とともに零に近づく行列である.

さらに $H=c(x, t)|p|$ の場合 $p_n{}^0\neq 0$ が[1]成り立っているとする. このとき $0<t_2-t_1<\varepsilon$ において行列

$$B_\beta=\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}(p^0, x, t_1, t_2)}{\partial p_i{}^0\partial p_j{}^0}\right\|+\beta\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\| \tag{2.17}$$

は十分小さい $\beta<0$ に対して負定値である.

証明[2]　Hamilton–Jacobi の理論より

$$\frac{\partial\tilde{S}(p^0, x, t_1, t_2)}{\partial p_i{}^0}=q_i(t_1),\qquad \frac{\partial\tilde{S}}{\partial x_i}=p_i(t_2). \tag{2.18}$$

したがって

$$\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i{}^0\partial p_j{}^0}=\left.\frac{\partial q_i}{\partial p_j{}^0}\right|_{\tau=t_1},\qquad \frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial x_i\partial p_j{}^0}=\left.\frac{\partial p_i}{\partial p_j{}^0}\right|_{\tau=t_2}. \tag{2.19}$$

ここで $q(\tau)$, $p(\tau)$ は Hamilton 系

$$\frac{dp_i}{d\tau}=-\frac{\partial H(p, q, \tau)}{\partial q_i},\qquad \frac{dq_i}{d\tau}=\frac{\partial H(p, q, \tau)}{\partial p_i}\qquad (i=1, 2\cdots, n) \tag{2.20}$$

---

1)　$P_i{}^0\ (i=1, \cdots, n)$ のうち一つが零でなければ, 一般性を失なわず $P_n{}^0\neq 0$ としてよい.

2)〔訳注〕　この証明は疑問点が多い. $\tilde{S}(x, p, t_1, t)$ を $t=t_1$ において Taylor 展開することにより容易に導かれる.

の解であって

$$p_i(t_1)=p_i{}^0,\qquad q_i(t_2)=x_i \tag{2.21}$$

を満たすものである．境界条件(2.21)は評価式

$$|p_i{}^0|\leqq b,\qquad |x_i|\leqq a \tag{2.22}$$

を満たす．したがって，補題 8.2 より

$$|t_2-t_1|\leqq \max_{\substack{i,\,|p|\leqq b+n+1\\ |q|\leqq a+1,\,\tau\leqq T_1}}\left\{\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{\partial H}{\partial q_i}\right\}$$

において不等式

$$|q(\tau)|\leqq a+1,\qquad |p(\tau)|\leqq b+n+1$$

を満たす．定数 M_1 を H の p,q に関する 1 次，2 次，3 次の導函数の $\tau\leqq T_1$, $|p|\leqq b+n+1$, $|q|\leqq a+1$ における値をおさえるようにとる．方程式(2.20)と条件(2.21)を $p_i{}^0$ について微分すれば，$\partial q_k/\partial p_i{}^0$, $\partial p_k/\partial p_i{}^0$ に関する方程式系

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial q_k}{\partial p_i{}^0}\right)&=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i{}^0}+\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial p_i{}^0}\right\}\\ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial p_k}{\partial p_i{}^0}\right)&=-\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i{}^0}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial p_i{}^0}\right\}\end{aligned} \tag{2.25}$$

および境界条件

$$\left.\frac{\partial p_k}{\partial p_i{}^0}\right|_{\tau=t_1}=\delta_{ki},\qquad \left.\frac{\partial q_k}{\partial p_i{}^0}\right|_{\tau=t_2}=0 \tag{2.26}$$

を得る．

$$\left|\frac{\partial q_i}{\partial p_j{}^0}\right|<\varepsilon,\qquad \left|\frac{\partial p_k}{\partial p_i{}^0}-\delta_{ki}\right|<\varepsilon \tag{2.27}$$

とすると，補題 8.2 より問題(2.25)-(2.26)の解で条件(2.27)を満たすものが，十分小さい $\varepsilon>0$ に対して

$$t_2-t_1\leqq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M_1(1+0(\varepsilon))},\quad T_1\right\}\leqq\frac{\varepsilon}{2M} \tag{2.28}$$

において存在する．方程式(2.25)を τ について積分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_k}{\partial p_i{}^0}&=-\sum_{j=1}^{n}\int_{\tau}^{t_2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i{}^0}+\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial p_i{}^0}\right]d\tau\\ \frac{\partial p_k}{\partial p_i{}^0}&=\sum_{j=1}^{n}\int_{\tau}^{t_1}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial p_i{}^0}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial p_i{}^0}\right]d\tau+\delta_{ik}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

よって(2.27)-(2.28)から

$$\left.\frac{\partial q_k}{\partial p_i{}^0}\right|_{\tau=t_1} = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i} d\tau + O(\varepsilon^2) \tag{2.30}$$

$$\left.\frac{\partial p_k}{\partial p_i{}^0}\right|_{\tau=t} = \delta_{ki} + O(\varepsilon). \tag{2.31}$$

(2.19) と (2.31) より補題の最初の主張が得られる．また Lagrange の公式を用いて，(2.20) を考慮すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i} d\tau = (t_2 - t_1) \left.\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i}\right|_{\tau=t_1} + \frac{(t_2-t_1)^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 H}{\partial p_k \partial p_i \partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial p_k \partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j}\right]_{\tau=\tau'} \qquad t_1 < \tau' < t_2. \tag{2.32}$$

(2.27)，(2.28)，(2.30)，(2.32) より

$$\left.\frac{\partial q_k}{\partial p_i{}^0}\right|_{\tau=t_1} = (t_1 - t_2) \left.\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k}\right|_{\tau=t_1} + O(\varepsilon^2) \tag{2.33}$$

ここで評価 $O(\varepsilon^2)$ には a, b, T が含まれている．結局，行列

$$\left\|\frac{\partial q_k}{\partial p_i{}^0}\right\|_{\tau=t_2}$$

の主小行列式の符号は ε が十分小さいとき，行列

$$-\left\|\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right\|_{t=t_1}$$

のそれの符号と等しいことがわかる．さて，行列

$$-\left\|\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right\|$$

のすべての主小行列式が負値であるとすれば，結局 (2.33) から行列

$$\left\|\frac{\partial q_i}{\partial p_j{}^0}\right\|_{\tau=t_1}$$

が正定値であること，したがって行列 B_β は $|\beta| = O(\varepsilon^2)$ 程度に十分小さければ負定値であることがわかる．さて $H = c(x, t)|p|$ とする．補題の仮定より $p_n{}^0 \neq 0$ である．補題 8.3 により行列 $-\|\partial^2 H/\partial p_i \partial p_j\|$ の主小行列式は n 次のそれ $-\det \|\partial^2 H/\partial p_i \partial p_j\|$ を除きすべて負である．したがって (2.33) より十分小さい ε に対して，行列 $\|\partial q_i/\partial p_j{}^0\|_{\tau=t}$ の主小行列式は行列式を除き負である．この場合

$$\det B_\beta < 0.$$

$|\beta| < O(\varepsilon^2)$ であるときは，B_β の他の主小行列式の符号は行列 $\|\partial q_i/\partial p_j{}^0\|_{\tau=0}$ の対応するそれと同じである．すなわち十分小さい ε に対して負であり，補題の主

張は示された.

4° 基本恒等式

補題 8.6 等式

$$\det\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i\partial x_j}\right\|_{\substack{p=P(x_0,t_1)\\x=X(x_0,t_2)}}\cdot\det\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t_2)}{\partial x_{0,j}}\right\|$$

$$=-\det\left\|\begin{matrix}\left\|\dfrac{\partial^2\tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i\partial p_j}\right\| & -E\\ -E & \left\|\dfrac{\partial^2 S(x_0(\xi,t_1),t_1)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|\end{matrix}\right\|_{\substack{x=X(x_0,t_2)\\p=P(x_0,t_1)\\\xi=X(x_0,t_1)}}\cdot\det\left\|\frac{\partial X(x_0,t_1)}{\partial x_{0,j}}\right\| \tag{2.34}$$

が成り立つ.

証明 次の方程式系を考察しよう.

$$\frac{\partial\tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i}=\xi_i,\qquad\frac{\partial S(x_0(\xi,t_1),t_1)}{\partial\xi_i}=p_i. \tag{2.35}$$

ここで $x=X(x_0,t_2)$ である. この方程式系は点

$$p_i=P_i(x_0,t_1),\qquad\xi_i=X_i(x_0,t_1) \tag{2.36}$$

において満たされている. 方程式系(2.35)を $x_{0,k}$ につき微分して, (2.36)を考察すると

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial p_j}\frac{\partial P_j}{\partial x_{0,k}}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial x_j}\frac{\partial X_j(x_0,t_2)}{\partial x_{0,k}}+\frac{\partial X_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0,k}}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\frac{\partial X_j(x_0,t_1)}{\partial x_{0,k}}=\frac{\partial P_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0,k}}$$

を得る. この二つの列を行列を用いて書くと

$$\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial p_j}\right\|_0\left\|\frac{\partial P_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0,k}}\right\|=-\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial x_j}\right\|\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t_2)}{\partial x_{0,k}}\right\|+\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0,k}}\right\| \tag{2.37}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|_0\left\|\frac{\partial X_j(x_0,t_1)}{\partial x_{0,k}}\right\|=\left\|\frac{\partial P_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0,k}}\right\|. \tag{2.38}$$

ここで行列の下つき '0' は $x=X(x_0,t_2)$, $\xi=X(x_0,t_1)$, $p=P(x_0,t_1)$ を意味する.

(2.38)を(2.37)に代入すると

$$\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial p_j}\right\|_0\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|_0 - E = -\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial x_j}\right\|_0\left\|\frac{\partial X_j(x_0,t_2)}{\partial x_{0,k}}\right\|\left\|\frac{\partial X_i(x,t_1)}{\partial x_{0,k}}\right\|^{-1}. \tag{2.39}$$

したがって

$$\det\left\{\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial p_j}\right\|_0\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|_0 - E\right\}$$
$$= -\det\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial x_j}\right\|_0\cdot\det\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t_2)}{\partial x_{0,k}}\right\|\cdot\det\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0,k}}\right\|^{-1}. \tag{2.40}$$

さて

$$B=\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial p_j}\right\|_0,\qquad A=\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|_0$$

とおく．等式(2.40)より $\det(BA-E)\neq 0$ である．行列

$$\begin{pmatrix} B & -E \\ -E & A \end{pmatrix}$$

を，行列式の値を変えないように変形しよう．左から行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & B \end{pmatrix}$$

を掛けると

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & BA-E \end{pmatrix}$$

となり，その行列式は $\det(BA-E)$ に等しい．結局

$$\det\left\|\begin{matrix} B & -E \\ -E & A \end{matrix}\right\| = \det(BA-E) \tag{2.41}$$

(2.40), (2.41)より(2.34)を得る．

さて区間$[t_1,t_2]$を十分小さくして，軌道 $X(x_0,t)$ はただ一つの焦点(x_0,t_1')を区間$[t_1,t_2]$にもち，かつ $\det\|\partial^2\tilde{S}(x,p,t_1,t)/\partial p_i\partial x_j\|\neq 0$，$t_1\leqq t\leqq t_2$ となるようにする．

補題 8.7 行列

$$R(t_1,t_2)=\begin{pmatrix}\left\|\dfrac{\partial^2\tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i\partial p_j}\right\| & -E \\ -E & \left\|\dfrac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|\end{pmatrix}_{\substack{x=X(x_0,t_2)\\ p=P(x_0,t_1)}} \tag{2.42}$$

の符号数(signature)は

$$\underset{t_1\leqq\tau\leqq t_2}{\mathrm{var}}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(\varepsilon,\tau)}{|\lambda_i(\varepsilon,\tau)|}$$

に等しい.

証明 行列$R(t_1,t_2)$の符号数を$\gamma(t_1,t_2)$で表わそう. まず, t' を焦点とし, もし $t_1<t_1'<t'<t_2'<t_2$ という関係があれば $\gamma(t_1,t_2)=\gamma(t_1',t_2')$ であることを示そう.

t を t_1 から t_1' まで連続的に動かす. もし $\gamma(t,t_2)$ が変化したとすれば, $t_1\leqq t_1''\leqq t_1'$ なる t_1'' において $\det R(t,t_2)$ は零となるはずである. 一方

$$\det R(t,t_2)=-\det\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}(x,p,t,t_2)}{\partial p_i\partial x_j}\right\|_0\cdot\det\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t_2)}{\partial x_{0,j}}\right\|\cdot\det\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t)}{\partial x_{0,j}}\right\|^{-1} \tag{2.43}$$

であり, 最初の行列式は区間$[t_1,t_2]$のとり方より零ではない. また第2項, 第3項も焦点ではないから零でも無限大でもない. したがって $\det R(t,t_2)\neq 0$ で矛盾である. よって $\gamma(t_1',t_2)=\gamma(t,t_2)$. 同様にして $\gamma(t_1',t_2')=\gamma(t_1,t_2)$ を得る. よって$[t_1',t_2']$は焦点 t' の十分近くとしてよい.

さて

$$\tilde{S}=\tilde{S}(x,p,t_1',t_2'),\qquad S=S(x_0(\xi,t_1'),t_1')$$

と書くことにしよう. 区間$[t_1',t_2']$を十分小さくとることにより, 行列

$$B_\beta(t_1',t_2')=\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial p_j}\right\|+\beta\left\|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right\|,\qquad \beta<0$$

の主小行列式は負と仮定してよい. このことは補題 8.5 より可能である.

$$B=\left\|\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial p_i\partial p_j}\right\|_0,\qquad A=\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|_0,\qquad R_\beta=\left\|\begin{matrix}B_\beta & -E\\ -E & A\end{matrix}\right\|$$

とおこう. 行列

$$R_\beta'=\left\|\begin{matrix}E & 0\\ B_\beta^{-1} & E\end{matrix}\right\|\cdot R_\beta\cdot\left\|\begin{matrix}E & B_\beta^{-1}\\ 0 & E\end{matrix}\right\|$$

を考察しよう. R_β と R_β' の慣性指数は等しい. なぜなら, R_β より R_β' の変換

は基底のとりかえにすぎないからである．R_β' を計算することにより

$$R_\beta' = \left\| \begin{matrix} B_\beta & 0 \\ 0 & A - B_\beta^{-1} \end{matrix} \right\|$$

となる．$-B_\beta$ は正定値であるから，R_β' の慣性指数は行列 $D(t_1', t_2') = A - B_\beta^{-1}$ のそれより求まる．(2.39) より

$$\begin{aligned} D(t_1', t_2') &= A - B_\beta^{-1} = B_\beta^{-1}\{(BA-E)-(B-B_\beta)A\} \\ &= B_\beta^{-1}\left\{ \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_2')}{\partial x_{0,j}} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1')}{\partial x_{0,j}} \right\|^{-1} + (B_\beta - B)A \right\}. \end{aligned}$$

$D(t_1', t_2')$ の両辺に $(-B_\beta)^{1/2}$ をかける．$(-B_\beta)^{1/2}$ は正定値自己共役行列ゆえ，得られた行列の符号数は $D(t_1', t_2')$ のそれに等しい．したがって $\gamma(t_1', t_2')$ は

$$\operatorname{sgn}(-B_\beta)^{1/2} D(t_1', t_2')(-B_\beta)^{1/2}$$

に等しい．ところで，$(-B_\beta)^{1/2} D(t_1', t_2')(-B_\beta)^{1/2}$ の固有値は重複度をこめて，行列 $(-B_\beta)^{1/2}\{(-B_\beta)^{1/2} D(t_1', t_2')(-B_\beta)^{1/2}\}(-B_\beta)^{-1/2}$ に等しい (Гельфанд[1])．結局 $\gamma(t_1', t_2')$ は行列

$$(-B_\beta) D(t_1', t_2') = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_2')}{\partial x_{0,j}} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1')}{\partial x_{0,j}} \right\|^{-1} - I_\beta A.$$

ここで

$$I_\beta = B_\beta - B = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の正の固有値と負の固有値の個数の差 $-n$ に等しいことがわかる．行列 A は，t_1' が焦点でないこと，および等式 (2.38) より有界である．したがって $\beta \to 0$ のとき，$I_\beta A \to 0$ となり，$\lim_{\beta \to 0}(-B_\beta)D(t_1', t_2') = -(BA-E)$ である．極限行列 $BA-E$ は正則であるから，β が十分小さいとき，極限行列の固有値の符号と $B_\beta D(t_1', t_2')$ のそれとは一致する．同様にして，$\det R(t_1', t_2') \neq 0$ であるから，行列 $R_\beta(t_1', t_2')$ と $R(t_1', t_2')$ の符号数は一致する．したがって，行列 $R(t_1, t_2)$ の符号数（それは $R(t_1', t_2')$ のそれに等しい）は，次の行列 $C(t_1', t_2')$ の正の固有値と負の固有値の個数の差 $-n$ に等しい：

$$C(t_1', t_2') = \left\| \frac{\partial \tilde{S}(x, p, t_1', t_2')}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_2')}{\partial x_{0,j}} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1')}{\partial x_{0,j}} \right\|^{-1}.$$

$t_1' = t' - \varepsilon$，$t_2' = t' + \varepsilon$ としよう．補題 8.5 より

$$C(t_1', t_2') = [E+D(\varepsilon)]\cdot\left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'+\varepsilon)}{\partial x_{0,j}}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'-\varepsilon)}{\partial x_{0,j}}\right\|^{-1}.$$

ここで $D(\varepsilon)\to 0\ (\varepsilon\to 0)$ となる行列である．$\lambda_i(\varepsilon)$，$\psi_i(\varepsilon)\ (i=1, 2, \cdots, n)$を，次の行列 $c(t', \varepsilon)$ の固有値と正規化された固有ベクトルとする：

$$c(t', \varepsilon) = \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'+\varepsilon)}{\partial x_{0,j}}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'-\varepsilon)}{\partial x_{0,j}}\right\|^{-1}.$$

そのとき

$$|c(t_1', t_2')\psi_i(\varepsilon)-\lambda_i(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon)| = |\lambda_i(\varepsilon)D(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon)| \leqq \lambda_i(\varepsilon)\|D(\varepsilon)\|.$$

よって，$\mu_k(\varepsilon)=\mu_k(t_1', t_2')$ を $c(t_1', t_2')$ の固有値とすると第1部補題2.3から，

$$\left|\frac{\lambda_k(\varepsilon)-\mu_k(\varepsilon)}{\lambda_k(\varepsilon)}\right| \to 0 \tag{2.44}$$

が導かれる[1]．$\lambda_k(\varepsilon)=a_k(\varepsilon)+ib_k(\varepsilon)$ とすると

$$\frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \frac{\mathrm{sgn}\ a_k(\varepsilon)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{b_k(\varepsilon)}{a_k(\varepsilon)}\right)^2}} + i\frac{\mathrm{sgn}\ b_k(\varepsilon)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a_k(\varepsilon)}{b_k(\varepsilon)}\right)^2}}.$$

$D(t_1', t_2')$ は自己共役であるから $\mu_k(\varepsilon)$ は実数である．したがって(2.44)から

$$\left(1+\left(\frac{a_k(\varepsilon)}{b_k(\varepsilon)}\right)^2\right)^{-1/2} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).$$

すなわち $b_k(\varepsilon)/a_k(\varepsilon)\to 0\ (\varepsilon\to 0)$．よって

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu_k(\varepsilon)}{|\mu_k(\varepsilon)|} = \mathrm{sgn}\ \mu_k(\varepsilon).$$

ここで最後の等式は $\mathrm{sgn}\ \mu_k(\varepsilon)$ が ε に依らなかったことによる[2]．

結局 $\gamma(t_1, t_2)$ は $\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\varepsilon)/|\lambda_k(\varepsilon)|-n$ に等しく，それは $\mu_k(\varepsilon)$ の正のものと負のものの個数の差$(-n)$に等しい．よって補題の主張は示された．

補題 8.8 条件

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} z_i z_j > 0 \qquad (z \neq 0)$$

が成り立っているとする．(x_0, t_0) を焦点とすれば，行列 $\|\partial X_i(x_0, t_0)/\partial x_{0,j}\|$ の退化次数は $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_i(\varepsilon, t_0)/|\lambda_i(\varepsilon, t_0)|\ (i=1, 2, \cdots, n)$ のうちの負の数の個数に等しい．

---

1)〔訳注〕 固有値の ε 依存性が明確でないので，この結論はすぐには出せない．この補題は次の補題 8.8 の証明をよく読めば成り立つ．

2) $\mu_k(\varepsilon)$ は $\varepsilon\to 0$ のとき，零にはならない．それは $\det R(t_1', t_2')\neq 0$ であることより導かれる．

証明　行列

$$A(t)=\left\|\frac{\partial X_i(x_0,t)}{\partial x_{0,j}}\right\|=\|a_{ij}(t)\|$$

を $t=t_0$ において考察しよう．そのとき，行列式の値が1の行列 $C(t), C_1(t)$ で，行列 $\tilde{A}(t)=C(t)A(t)C_1(t)$ が $t=t_0$ において対角行列となるものが存在する．$t=t_0$ が k 次の焦点であるならば，Morse の定理より

$$\tilde{A}(t_0)=\begin{Vmatrix}0 & & 0\\ & a_{k+1} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_n\end{Vmatrix},\qquad a_i=a_{ii}(t_0)\qquad i>k$$

となる．行列 $\tilde{A}_k(t)=\|a_{ij}(t)\|_{i,j\leqq k}$ と $B_k(t_0)=\lim_{t\to t_0}(t-t_0)^{-1}\tilde{A}_k(t)$ を考察しよう．

$$\det\tilde{A}_k(t)=(t-t_0)^k\det B_k(t_0)+O(t-t_0)^{k+1}$$

を得る．$\det B_k(t_0)\neq 0$ を示そう．行列式の定義より $\det\tilde{A}(t)=(t-t_0)^k\det B_k(t_0)\prod_{j=k+1}^{n}a_j+O(t-t_0)^{k+1}$ であるから，Morse の定理より $\det B_k(t_0)\neq 0$ である．D_1, D_2 を行列 $\tilde{B}_k(t_0)=D_1B_k(t_0)D_2$ が対角行列となる直交行列とする．

さて

$$\tilde{D}_1=\begin{pmatrix}D_1 & 0\\ 0 & E\end{pmatrix},\qquad \tilde{D}_2=\begin{pmatrix}D_2 & 0\\ 0 & E\end{pmatrix},\qquad \tilde{C}=\tilde{D}_1C(t),\qquad \tilde{C}_1=C(t)\tilde{D}_2$$

とおく．$\tilde{\tilde{A}}(t)=\tilde{C}A(t)\tilde{C}_1$ とすれば，この行列が次の形をしていることは明らかであろう；

$$\tilde{\tilde{A}}(t)=\begin{Vmatrix}(t-t_0)a_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & O(t-t_0) & \\ 0 & & (t-t_0)a_k & & \\ & & & a_{k+1}+O(t-t_0) & O(t-t_0)\\ & O(t-t_0) & & & \ddots \\ & & & O(t-t_0) & a_n+O(t-t_0)\end{Vmatrix}+\|O(t-t_0)^2\|.$$

ここで $a_k\neq 0, k=1,2,\cdots,n$ である．

最初の k 行の適当な1次結合を後の $(n-k)$ 行より引くことにより，$\tilde{\tilde{a}}_{ij}, i>k, j\leqq k$ は $O(t-t_0)^2$ としてよい．同様に，最初の k 列の適当な1次結合を後の $(n-k)$ 列より引くことにより，$\tilde{\tilde{a}}_{ij}, i\leqq k, j>k$ も $O(t-t_0)^2$ としてよい．

さて，以下において，$D_i{}^l(t)$ は l 次行列を表わすことにしよう．前述のことから，非退化な定数行列 S_1, S_2 により，$S_1A(t)S_2$ は次のように変形できる；

$$S_1A(t)S_2=\begin{Vmatrix}(t-t_0)W_k & 0\\ 0 & W_{n-k}+(t-t_0)D_1{}^{n-k}(t)\end{Vmatrix}+D_2{}^n(t)(t-t_0)^2.$$

ここで

$$W_k=\begin{Vmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_k\end{Vmatrix},\qquad W_{n-k}=\begin{Vmatrix}a_{k+1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{Vmatrix}$$

である．公式 $(A+B)^{-1}=\{(E+BA^{-1})A\}^{-1}=A^{-1}(E+BA^{-1})^{-1}$ を用いて，

$$[S_1A(t)S_2]^{-1}=\begin{Vmatrix}(t-t_0)W_k & 0\\ 0 & W_{n-k}+(t-t_0)D_1{}^{n-k}(t)\end{Vmatrix}^{-1}$$

$$\times\left\{E+(t-t_0)D_3{}^n(t)\begin{Vmatrix}W_k{}^{-1} & 0\\ 0 & (t-t_0)W_{n-k}{}^{-1}\end{Vmatrix}+(t-t_0)^2D_4{}^n(t)\right\}^{-1}.$$

したがって

$$[S_1A(t)S_2]^{-1}=\begin{Vmatrix}(t-t_0)^{-1}W_k{}^{-1} & 0\\ 0 & W_{n-k}{}^{-1}+(t-t_0)D_5{}^{n-k}\end{Vmatrix}\cdot\{E+(t-t_0)D_6{}^n(t)\}$$

よって行列

$$C(\varepsilon,t_0)=A(t_0-\varepsilon)[A(t_0+\varepsilon)]^{-1}$$

の固有値は，次の行列のそれと一致する；

$$S_1A(t_0-\varepsilon)[A(t_0+\varepsilon)]^{-1}S_1{}^{-1}=S_1A(t_0-\varepsilon)S_2[S_1A(t_0+\varepsilon)S_2]^{-1}$$

$$=\begin{Vmatrix}-\varepsilon W_k & 0\\ 0 & W_{n-k}+\varepsilon D_1{}^{n-k}(t)\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\varepsilon^{-1}W_k{}^{-1} & 0\\ 0 & W_{n-k}{}^{-1}+\varepsilon D_6{}^{n-k}(t)\end{Vmatrix}$$

$$\times[E+\varepsilon D_7{}^n(t)]+\varepsilon^2D_8{}^n(t)$$

$$=\begin{Vmatrix}-E_k & 0\\ 0 & E_{n-k}\end{Vmatrix}(E+\varepsilon D_9{}^n(t)).$$

ここに E_i は i 次の単位行列である．ゆえに $\varepsilon\to0$ とすれば $\lim_{\varepsilon\to0}\lambda_i(\varepsilon,t_0)/|\lambda_i(\varepsilon,t_0)|$ のうち負のものの個数は k に等しい．補題 8.7 および 8.8 より公式(1.38)における位相因子は $\exp(i\pi\tilde{\gamma}/2)$，$\tilde{\gamma}$ は軌道 $X(x_0,0,T)$ の Morse の指数に等しい[1]．

---

1)〔訳注〕 原著の位相因子は $i\pi(n/4-\tilde{\gamma}/2)$ となっているが誤り．H^+ は補題 8.3 により負定値だから符号は正が正しい．

第9章　Bohrの準古典公式の誤差計算における摂動論の正則化

§1　序

すでに何度も言及したように，準古典表現はただ単に解の h の冪に関する漸近展開の第1項を与えるだけではない．準古典表現が求まった後，われわれは摂動論の方法が機能する領域に足を踏み入れることとなる．

なかでも第3章§5や第4章§4の問題の固有値の摂動論的級数の各項をより高次の展開項に留意しつつ正則化する問題は最も複雑であることがわかる．ここでは例として1次元[1] Schrödinger 方程式の固有値問題に対する準古典近似の第2項の計算をやってみよう(Маслов[6]-[7])．

方程式

$$-\varepsilon^2 u'' + v(x)u = \lambda u \tag{1.1}$$

を考察する．ここに ε は微小パラメーターである〔(以下 h と混用)〕．次の仮定をおく．1) 方程式(1.1)のスペクトルは点 λ の近くで離散的である．2) 開集合 $v(x)<\lambda$ の連結成分でその両端点 $x_1(\lambda), x_2(\lambda)$ が函数 $v(x)-\lambda$ の単純零点であるものが存在する．3) 函数 $v(x)$ は3回連続微分可能である．

固有値 λ_n で $\lambda_n = \lambda_n{}^{(1)} + O(\varepsilon^2)$ を満たすものの存在が知られている．ここに $\lambda_n{}^{(1)}$ は

$$\int_{x_1(\lambda_n{}^{(1)})}^{x_2(\lambda_n{}^{(1)})} \sqrt{\lambda_n{}^{(1)} - v(x)}\, dx = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\varepsilon \tag{1.2}$$

なる超越方程式(Bohrの公式)により定まる．$v(x)$ に対するある仮定のもとに公式(1.2)は λ_n の $n\to\infty$ のときの漸近第1項を定めることが証明される(Titchmarsh[1])．

---

1)　近刊の書物で述べられる予定の多次元の場合の漸近級数項の計算法はこの章で展開される方法とは根本的に異なり，正準変換のある種の不変量の定義と作用素 $K^{r,\alpha^0}_{1/n,\Gamma,h}$ における元 $e^{i}(\alpha,h)$ の不変な定義の仕方にもとづいたものであることを注意しておく．しかしここでの方法は極めて直観的に摂動論的級数の各項の正則化と固有値の誤差計算との関係を定めるという点で便利ではある．

§2 漸近第2項

Titchmarsh は彼の有名な書物[1]において固有値の h に関する漸近第2項の公式を発見的考察によって導いたあと，$v(x)=x^k$ の場合にそれを厳密化する問題を立てている．この場合にはこのような問題はすでに示されたように単純な変形により準古典近似の問題に帰着される．Titchmarsh 自身はこの問題を $v(x)=x^4$ および $v(x)=x^6$ の場合に限り，きわめて複雑な方法で解いた．

一方，著者により h に関する漸近展開のすべての項を決定するための反復公式が得られ，証明された．その際，展開第2および第3項に対する公式は簡単な閉じた形で得られている(Маслов[6]-[7])．これらの公式は，外見上 Titchmarsh の導いたものと異なってはいるが，簡単な変換で後者に帰着できる．

ここでは固有値 λ_n の h の冪に関する展開のすべての項を反復によって求めるための手順を述べよう．

Маслов[6]に得られている公式は次の形である．

$$\lambda_n = \lambda_n{}^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n{}^{(2)} + o(\varepsilon^2). \tag{2.1}$$

ここに

$$\lambda_n{}^{(2)} = -\frac{1}{12T}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}\int_{x_1(\lambda)}^{x_2(\lambda)} \frac{[v'(x)]^2}{\sqrt{\lambda - v(x)}}dx\right]_{\lambda=\lambda_n{}^{(1)}} \tag{2.2}$$

であり

$$T = \int_{x_1(\lambda_n{}^{(1)})}^{x_2(\lambda_n{}^{(1)})} \frac{dx}{\sqrt{\lambda_n{}^{(1)} - v(x)}} \tag{2.3}$$

である．いま

$$\tilde{\Phi}^2 = \int_0^T \Phi^2(x(\tau))d\tau = \int_{x_1(\lambda)}^{x_2(\lambda)} \frac{\Phi^2(x)}{\sqrt{\lambda - v(x)}}dx$$

なる記号を導入すれば，

$$\lambda_n{}^{(2)} = -\frac{1}{12T}\frac{d^2\tilde{F}^2}{d\lambda^2}\bigg|_{\lambda=\lambda_n{}^{(1)}}, \qquad F = -v'(x)$$

という公式を得る．

ここでは公式(2.1)の全く初等的な証明を与えよう．ただし評価は Маслов [6]よりも弱くなる．

このため点 $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ における固有函数 ψ_n の一様漸近展開を用いる(Виле-

нкин 他[1]を見よ). $W_n(x)$を方程式

$$-\varepsilon^2 W_n''+(x^2-\mu_n)W_n=0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} W_n^2 dx=1 \tag{2.4}$$

を満たす固有函数とする. よく知られているように$\mu_n=\varepsilon(2n+1)$である.

$$F_n(x)=z(x)W_n(y(x))\varphi(x)$$

とおこう. ここに$y(x)$は方程式

$$y'=\sqrt{\frac{\lambda_n^{(1)}-v(x)}{\mu_n-y^2}} \tag{2.5}$$

と境界条件$y(x_1(\lambda_n^{(1)}))=-\sqrt{\mu_n}$, $y(x_2(\lambda_n^{(1)}))=\sqrt{\mu_n}$(これは(1.2)により可能)とを満たす函数であり,

$$z(x)=(y')^{-1/2}$$

また$\varphi(x)$は区間$(x_1(\lambda)-2\delta, x_2(\lambda)+2\delta)$の外では0に等しく$x_1(\lambda)-\delta\leqq x\leqq x_2(\lambda)+\delta$では1に等しい函数である.

まず初めに次の主張が成り立つことを示そう.

$v'(x)$は点$x=x_1(\lambda_n^{(1)})$および$x=x_2(\lambda_n^{(1)})$において0にならずまた$v(x)$はk回連続的微分可能とする. このとき$y(x)$は点$x=x_1(\lambda_n^{(1)})$および$x=x_2(\lambda_n^{(1)})$においてk回連続的微分可能となる.

まずy'が折返し点$x_1=x_1(\lambda_n^{(1)})$, $x_2=x_2(\lambda_n^{(1)})$の近くで有界でかつ$y'(x_\nu)\neq 0$ $(\nu=1,2)$であることを証明しよう[1].

$$y'^2=\frac{\lambda_n^{(1)}-v(x)}{(\sqrt{\mu_n}-y)(\sqrt{\mu_n}+y)} \tag{2.6}$$

であるが

$$\lim_{x\to x_1}\frac{\lambda_n^{(1)}-v(x)}{(\sqrt{\mu_n}-y)(\sqrt{\mu_n}+y)}=-\frac{v'(x_1)}{2\sqrt{\mu_n}\,y'(x_1)}$$

だから

$$y'_{x=x_1}{}^2=-\frac{v'(x_1)}{2\sqrt{\mu_n}\,y'(x_1)}$$

となり,

$$y'(x_1)=\left[-\frac{1}{2\sqrt{\mu_n}}v'(x_1)\right]^{1/3}\neq 0.$$

したがって

1)〔訳注〕 これは$z(x)$の微分可能性に必要.

$$y+\sqrt{\mu_n}=O(x-x_1), \qquad y-\sqrt{\mu_n}=O(x-x_2)$$

である．いま

$$\Phi(y)=\left[\int_{-\sqrt{\mu_n}}^{y}\sqrt{\mu_n-\xi^2}\,d\xi\right]^{2/3}$$

を$(y+\sqrt{\mu_n})$の級数に展開し最初のk項に着目すれば，$P_k, \tilde{P}_k, \bar{P}_k$等を$k$次のある多項式として

$$\Phi(y)=P_k(y+\sqrt{\mu_n})+O(x-x_1)^{k+1}, \qquad P_k'(0)\neq 0$$

となる．(2.5)によれば

$$\Phi(y(x))=\left[\int_{x_1}^{x}\sqrt{\lambda_n{}^{(1)}-v(x)}\right]^{2/3}=\tilde{P}_k(x-x_1)+O(x-x_1)^{k+1}$$

であるから

$$P_k(y(x)+\sqrt{\mu_n})=\tilde{P}_k(x-x_1)+O(x-x_1)^{k+1}.$$

$P_k'(0)\neq 0$より逆函数$P_k{}^{-1}(z)$は$z=0$の近傍で正則であり，したがって

$$y+\sqrt{\mu_n}=P_k{}^{-1}\{\tilde{P}_k(x-x_1)+O(x-x_1)^{k+1}\}=\bar{P}_k(x-x_1)+O(x-x_1)^{k+1}$$

が得られた．点$x=x_2$に対する主張も同様にして示される．

$F_n(x)$は次の方程式を満たすことが容易に確かめられる．

$$-\varepsilon^2F_n''+[v(x)-\lambda_n{}^{(1)}]F_n(x)+\varepsilon^2\frac{z''}{z}F_n(x)=\varepsilon^2\{\varphi''zW_n-2[\varphi'(zW_n)]'\} \tag{2.7}$$

φ'およびφ''は$\lambda_n{}^{(1)}<v(x)$なる領域の部分領域においてのみ0と異なるのだから，Weber函数の漸近形により上の等式の右辺は$e^{-\delta/\varepsilon}$の程度であることがわかる．(2.7)式に$\psi_n(x)$を掛けて部分積分を行なえば

$$(\lambda_n-\lambda_n{}^{(1)})\int_{x_1-2\delta}^{x_2+2\delta}\psi_nF_n dx=-\varepsilon^2\int_{x_1-2\delta}^{x_2+2\delta}\frac{z''}{z}F_n\psi_n dx+O(e^{-\delta/\varepsilon}). \tag{2.8}$$

ここに$x_1=x_1(\lambda_n{}^{(1)})$，$x_2=x_2(\lambda_n{}^{(1)})$と常に略記してある．領域$\lambda_n{}^{(1)}>v(x)$の対応する部分領域における函数$\psi_n$の$\varepsilon\to 0$のときの漸近性(Виленкин 他[1])を考慮すれば[1]

---

1)〔訳注〕 WKB法による古典領域内部での固有函数の漸近形は$(1/\sqrt[4]{\lambda_n{}^{(1)}-v(x)})\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_{x_1}^{x}\sqrt{\lambda_n{}^{(1)}-v(x)}\,dx-\frac{\pi}{4}\right)$．(本書第2部第2章図7の計算例はこの場合に容易に拡張できる.)

$$\int \psi_n{}^2 dx - \int_{-\infty}^{x_1+\delta} \psi_n{}^2 dx - \int_{x_2-\delta}^{\infty} \psi_n{}^2 dx$$
$$\to \frac{2}{T}\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{1}{P}\sin^2\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_1}^{x} P dx + \frac{\pi}{4}\right\} dx \to 1 + O(\delta) \qquad (2.9)$$

を得る．ここに $P=\sqrt{\lambda_n{}^{(1)}-v(x)}$．ゆえに $\int \psi_n{}^2 dx = 1$ により

$$\int_{-\infty}^{x_1+\delta} \psi_n{}^2 dx + \int_{x_2-\delta}^{\infty} \psi_n{}^2 dx \to O(\delta). \qquad (2.10)$$

同様の主張は $F_n(x)$ に対しても成り立つ．ゆえに

$$\frac{\lambda_n - \lambda_n{}^{(1)}}{\varepsilon^2} = \frac{\displaystyle\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{z''}{zP}\sin^2\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_1}^{x} P dx + \frac{\pi}{4}\right\} dx}{\displaystyle\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{1}{P}\sin^2\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_1}^{x} P dx + \frac{\pi}{4}\right\} dx} + O_\delta(\varepsilon) + O(\delta)$$
$$= \frac{1}{T}\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{z''}{zP} dx + \tilde{O}_\delta(\varepsilon) + O(\delta) = \frac{1}{T}\int_{x_1}^{x_2} \frac{z''}{zP} dx + \bar{O}_\delta(\varepsilon) + O(\delta)$$

ここで $\varepsilon\to 0$ とし，次いで $\delta\to 0$ とすれば

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\lambda_n - \lambda_n{}^{(1)}}{\varepsilon^2} - \frac{1}{T}\int_{x_1}^{x_2} \frac{z''}{zP} dx\right] = 0 \qquad (2.12)$$

が得られた．（最後の式は δ に依存していない．）

z および z'' を y で表わせば

$$\frac{z''}{zP} = -\frac{1}{12}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}\frac{(v')^2}{\sqrt{\lambda - v(x)}}\right]_{\lambda=\lambda_n{}^{(1)}} + \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\frac{v'}{P^3}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{y'}{(\mu_n - y^2)^{3/2}} - \frac{5}{4}\frac{y^2 y'}{(\mu_n - y^2)^{5/2}}$$

を得る．これから

$$\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{z''}{zP} dx = -\frac{1}{12}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}\int_{x_1(\lambda)+\delta}^{x_2(\lambda)-\delta} \frac{(v')^2}{\sqrt{\lambda - v(x)}} dx\right]_{\lambda=\lambda_n{}^{(1)}} + O(\delta)$$

なることは容易に確かめられるから，等式

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{z''}{zP} dx = -\frac{1}{12}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}\int_{x_1(\lambda)}^{x_2(\lambda)} \frac{(v')^2}{\sqrt{\lambda - v(x)}} dx\right]_{\lambda=\lambda_n{}^{(1)}}$$

が得られ公式(2.1)の証明が完了した．以上をまとめれば

定理 9.1 仮定1)-3)のもとに方程式(1.1)の固有値 λ_n で関係式

$$\lambda_n = \lambda_n{}^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n{}^{(2)} + o(\varepsilon^2) \qquad (n\varepsilon \to \text{const.} \text{ のとき})$$

を満たすものが存在する．ここに $\lambda_n{}^{(1)}, \lambda_n{}^{(2)}$ はそれぞれ公式(1.2), (2.2)によ

り定まる.

系1 仮定1),2),3)が満たされているとする.このとき第2章§1-4°の方程式(1.7)の固有値ν_nの漸近展開は次の形となる.

$$\nu_n=\frac{(2n+1)\pi}{2s}-\frac{1}{24\pi n}\frac{d^2\tilde{F}^2}{d\lambda^2}+o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.13}$$

ここに

$$s=\int_{x_1}^{x_2}Pdx.$$

公式(2.13)を出すには先の問題において$\lambda_n=\lambda$とおき,したがってεとしては離散値ε_nをとりながら0に収束させなければならない.このとき公式(2.1),(2.2)は$n\to\infty$のときこれらの離散値の漸近形を定めることになる.方程式

$$\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon_n=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\lambda-\varepsilon_n{}^2\lambda_n{}^{(2)}-v(x)}\,dx+o(\varepsilon_n{}^2)$$

を$o(\varepsilon_n{}^2)$の精度で$\varepsilon_n=1/\nu_n$について解けば公式(2.13)を得る.

系2 方程式

$$-\psi_n{}''+x^\alpha\psi_n=\lambda_n\psi_n, \qquad \alpha>0 \tag{2.14}$$

の固有値λ_nの$\lambda_n\to\infty$のときの漸近形は次の形をしている.

$$\lambda_n=\lambda_n{}^{(1)}+\lambda_n{}^{(2)}+o(\lambda_n{}^{(2)}).$$

ここに$\lambda_n{}^{(1)}$, $\lambda_n{}^{(2)}$はそれぞれ公式(1.2),(2.2)で定まる.

方程式(2.14)において$x=\gamma\xi$, $\lambda_n=\beta E_n$の形の変数変換をすれば,上の問題は準古典近似の問題に帰着する.

これでTitchmarshが立てた問題は解かれたわけである.

§3 漸近第3項

今度は§1の条件1),2)に加えて函数$v(x)$は6回連続的微分可能と仮定する.このときそこで証明した主張により$y(x)$は点x_1, x_2で6回連続的微分可能,またz''/zはそこで3回連続的微分可能となる.

$$y_1=\frac{1}{2\sqrt{\mu_n-y^2}}\left\{\lambda_n{}^{(2)}\int_{x_1}^{x}\frac{dx}{P}+\int_{x_1}^{x}\frac{z''}{zP}dx\right\} \tag{3.1}$$

とおこう.点$x=x_1$の近傍で

$$\frac{z''}{z} = P_3(x-x_1)+o(x-x_1)^3, \qquad \mu_n - y^2 = P_4(x-x_1)+o(x-x_1)^4$$

となる．ゆえに y_1 はその形から点 x_1 において3回連続的微分可能である．

さらに公式(2.12)によれば

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{\mu_n - y^2}}\left\{\lambda_n^{(1)}\int_{x_2}^{x}\frac{dx}{P} + \int_{x_2}^{x}\frac{z''}{zP}dx\right\} \tag{3.2}$$

であることに注意しよう．したがって上と同様の理由で y_1 は点 $x=x_2$ においても3回連続的微分可能となる．方程式

$$zz_1'y' + y''z_1 + y_1''z + zy_1'z' = 0$$

により z_1 を積分定数を除いて定める

$$R_n(x) = \varphi(x)(z^2+\varepsilon^2 z_1)W_n(y+\varepsilon^2 y_1) \tag{3.3}$$

とおく．$R_n(x)$ は次の方程式を満たすことを確かめることができる．

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 R_n'' + [v(x) - \lambda_n^{(1)} - \varepsilon^2\lambda_n^{(2)}]R_n - \varepsilon^2 K(x)\varphi(x)W_n(y+\varepsilon^2 y_1) \\ = \varepsilon^6(y_1''z_1 + 2y_1'z_1')\varphi(x)W_n'(y+\varepsilon^2 y_1) + [2\varepsilon^6\{(y_1')^2 y_1 y + y_1'y'(y_1)^2\} \\ + \varepsilon^8(y_1')^2 y_1^2]R_n + \varepsilon\varphi''(z^2+\varepsilon^2 z_1)W_n + 2\varepsilon\varphi'[(z+\varepsilon^2 z_1)W_n]'. \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここに

$$K(x) = z_1'' + \left(\frac{z''}{z} - \lambda_n^{(2)}\right)z_1 + (y_1')^2(\mu_n - y^2) - 4y_1'y'y_1y - (y')^2 y_1^2$$

である．等式(3.4)の右辺の最後の二つの項は φ' および φ'' がWeber函数の($\varepsilon\to 0$ における)指数的減少領域においてのみ0と異なるため，$O(e^{-\delta/\varepsilon})$ の程度である．右辺第1項の L_2 ノルムは $\|W_n'\| = O(1/\varepsilon)$ により $O(\varepsilon^5)$ の程度である．右辺に残った中程の項は $O(\varepsilon^6)$ の程度である．

(2.8)-(2.12)の考察を適用すれば

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_n^{(2)} + \varepsilon^4\lambda_n^{(3)} + o(\varepsilon^4) \tag{3.5}$$

が得られる．ここに

$$\lambda_n^{(3)} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{K(x)}{zP}dx \tag{3.6}$$

である．Саврасов[1]は(3.6)の次のような書き換えを与えた．

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(3)} = \lambda_n^{(2)}\frac{d\lambda_n^{(2)}}{dn}\Big/\frac{d\lambda_n^{(1)}}{dn} - \frac{(\lambda_n^{(2)})^2}{2}\frac{d^2\lambda_n^{(1)}}{dn^2}\Big/\left(\frac{d\lambda_n^{(1)}}{dn}\right)^2 \\ + \frac{1}{48}\frac{d}{dn}\left[\frac{1}{5}\frac{d^2}{d\lambda^2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(v'')^2}{\sqrt{\lambda - v}}dx - \frac{1}{36}\frac{d^4}{d\lambda^4}\int_{x_1}^{x_2}\frac{(v')^4}{\sqrt{\lambda - v}}dx\right]_{\lambda=\lambda_n^{(1)}}. \end{aligned}$$

以上により次の定理が得られた.

定理 9.2 §1と§3の仮定のもとに方程式(1.1)の固有値 λ_n で $n\varepsilon\to\mathrm{const}$ のとき関係式

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_n^{(2)} + \varepsilon^4\lambda_n^{(3)} + o(\varepsilon^4)$$

を満たすものが存在する. ここに $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}, \lambda_n^{(3)}$ はそれぞれ公式(1.2), (2.2), (3.7)により定められる.

この定理から前節系1,2におけると同様, 第2章の問題(1.7)やこの章の(2.14)に対する固有値の漸近展開の第3項を容易に得ることができる.

付録　トンネル型方程式の解の漸近形の不連続性

§1　序

波動型の方程式の解の不連続性の研究方法はトンネル型や混合型の方程式の解の漸近形の研究にも適用できる．これに関してはあまり詳しくは触れないこととし，ここではただ準古典近似と密接に結びついている二つの問題をとり上げる．その一つは Navier–Stokes 方程式系の解の粘性が0に近づいたときの衝撃波の近くでの解の漸近形の考察であり，それは1階準線型方程式系の解の不連続性を調べる問題である．

他の一つは境界値問題

$$\begin{aligned} &\Delta u-\omega^2c^2(x)u=0, \qquad x=(x_1,x_2,x_3),\\ &u|_\Gamma=f(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

の解の $\omega\to\infty$ における漸近形の考察である．ここに Γ は閉じた滑らかな曲面とする．この種の問題の解の漸近形については Вишик–Люстерник[1]の研究があるが，そこでは境界付近の狭い($1/\omega$ 程度の)帯の中で $O(1/\omega^N)$(Nは任意)の精度の結果があるにすぎない．Γ で囲まれた領域の内部においてはただ $u=O(1/\omega^\infty)$ であることだけが知られている．われわれはここでは大域的漸近形を与える．すなわち，$u(x,\omega_1)=u_0(x,\omega)(1+O(1/\omega))$ なる函数 $u_0(x,\omega)$ を見出す．この漸近形は次の準線型方程式系の解の不連続な場所でちょうど不連続性を持つことがわかる．

$$(u_0\,\mathrm{grad})\,u_0+\mathrm{grad}\,c^2(x)=0.$$

これは第1章§3，段落4の意味で方程式(1.1)に対する特性方程式と定義される．この問題は Schrödinger 方程式の解の影の領域における漸近形の問題とも近い関係にある．後者の問題は特性方程式の複素解と関係しており，ここではほとんど触れない．

ここで考察する二つの問題はごく部分的なものであり，同様の主張はずっと広いクラスのトンネル型方程式に対しても成立する．

§2　衝撃波の近くでの漸近形

1°　懸濁液に対する Navier–Stokes 方程式

1. Navier–Stokes 方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\,\mathrm{grad})\,u+\mathrm{grad}\,v(x)=\eta\Delta u, \qquad x=(x_1,x_2,x_3), \qquad u=\{u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t)\} \tag{2.1}$$

の解で初期条件

$$u|_{t=0}=\mathrm{grad}\,f(x) \tag{2.2}$$

を満たすものを考察する．

1a. この問題設定は普通でないので，これが記述する物理的モデルに触れておこう．ガスとそれに混和した液滴か，あるいは懸濁液という2相混合物を考える．簡単のため以下懸濁液について述べよう．固体粒子の総容量は液体のそれに比べて小さく，一方固相の密度は液体のそれよりはるかに大きいと仮定する．これは懸濁液の実効粘性 η_{eff} が液体の粘性 η とあまり違わないことを意味する．この混合物は空間全体に拡がっており，時間および空間とともにゆっくりと変化する力の場におかれていると仮定しよう．このポテンシャルは

$$V_0V\left(\frac{x_1}{l},\frac{x_2}{l},\frac{x_3}{l},\frac{t}{t_0}\right)$$

と書ける．ここに V_0 は単位体積に担われる特性エネルギー，l,t_0 は特性長および特性時間であり，x_1,x_2,x_3 は3次元空間内の点の座標である．われわれは系がつねに準定常的な相平衡の状態にあるとみなす．したがって特性時間 t_0 はこのような系の相平衡における圧力の回復時間より大きいと仮定する．さらに

$$\mathrm{grad}\;V_0V\left(\frac{x_1}{l},\frac{x_2}{l},\frac{x_3}{l},\frac{t}{t_0}\right)\gg\mathrm{grad}\,p \qquad (p\text{ は圧力}).$$

ゆえに，古典的な Navier–Stokes 方程式系において $\mathrm{grad}\,p$ を無視することができ，こうして懸濁液の液相の速度に対する方程式(2.1)に到達する．以上の仮定より

$$\eta/V_0t_0\ll 1, \qquad pv_0^{\,2}\sim V_0 \qquad (v_0=l/t_0).$$

これから分るようにこれらの関係式は第1章§2，段落3の関係式と同じものであり，粘性率の次元はちょうど単位体積あたりの Planck 定数 h の次元に

等しい.

全く同様に蒸気とその液滴との飽和混合物を考察することができる. この系は液体と蒸気の2種の成分から成るが, 液滴が飽和蒸気の圧力を一定に保つという消極的な役割しか持たない場合にはただ1種の成分である蒸気を考察すればよい. 蒸気の分子は液滴からの蒸発によって生じたり, それに凝縮することによって消滅したりできるのである[1)].

Schrödinger 方程式は(電子光学におけるように)相互作用を持たない電子束の行動を記述する方程式と解釈することができることに注意しよう. しかし実際には系はその中に陽子や光子を含んでおり, 電子は発生したり消滅したりできる. Schrödinger 方程式によって記述されるこのモデルには陽子や光子は関与していないが, それらは上に述べた液体の消極的役割を果たしているといえないだろうか?

1 b. 未知函数の変換

$$u(x,t)=\eta\,\mathrm{grad}\,\ln\psi(x,t) \tag{2.3}$$

により方程式は

$$\eta\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\eta^2}{2}\Delta\psi+v(x)\psi,\qquad \psi(x,0)=e^{-f(x)/\eta} \tag{2.4}$$

となる. すなわち, 粘性率を純虚数にとれば Navier–Stokes 方程式系はこのような設定のもとでは Schrödinger 方程式と一致する.

Schrödinger 方程式と Navier–Stokes 型の方程式との関係について論じた文献は多いが(たとえば Bohm[1]), 上の状況下における両者の直接的関係に言及した物理学者は私の知る限りではないようである.

2° Navier–Stokes 方程式の解の漸近形と $\eta\to 0$ の極限移行

2. 方程式(2.4)に対する第1章§3の意味での陪特性系は次の形となる.

$$\dot{x}_i=p_i,\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial v}{\partial x_i},\qquad \frac{ds}{dt}=\frac{p^2}{2}-v(x). \tag{2.5}$$

初期値を

$$x(0)=x_0,\qquad p(0)=\mathrm{grad}\,f(x_0),\qquad s(0)=f(x_0) \tag{2.6}$$

とおこう. 記号

1) 同じ問題に導かれる他のモデルが Бреховских[1]-[2]にある.

$$X(x_0,t)=x(t),\qquad P(x_0,t)=p(t),\qquad S(x_0,t)=s(t)$$

を導入する．この問題はすでに指摘されたように次の汎函数の極値を求めることに帰着する．

$$\Phi[q(\tau)]=f(q(0))+\int_{x_0}^{x(t)}\left\{\frac{\dot{q}^2}{2}-v(q)\right\}d\tau,\qquad q(t)=x,\qquad \dot{q}(0)=\operatorname{grad} f(q(0)). \tag{2.7}$$

定理 1.1　点 (x,t) は汎函数 $\Phi[q(\tau)]$ のどの極値に関しても焦点ではないとする（第２章§1–5° 参照）．このとき問題(2.7)はただ有限個の解 $q^i(\tau), i=1,\cdots,k_0$ を持ち，

$$u(x,t)=-\eta\operatorname{grad}\ln\sum_{i=1}^{k_0}\left|\det\left\|\frac{\partial q_k{}^i(0)}{\partial x_j}\right\|\right|^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{\eta}\Phi[q^i(\tau)]\right\}+O(\eta^2)$$

$$=-\eta\operatorname{grad}\ln\sum_{i=1}^{k_0}\left|\det\left\|\frac{\partial X_k(x_0{}^i,t)}{\partial x_{0,j}}\right\|\right|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{\eta}S(x_0{}^i,t)\right\}+O(\eta^2)$$

となる．ここに $x_0{}^i=x_0{}^i(x,t)$ は方程式

$$X(x_0,t)=x$$

により定まる．

3. 系　$v(x)$ は解析的で $v(x)=\mathrm{const}+O(1/|x|^{2n})$ を満たすとする．このとき各点 x,t に対し汎函数 Φ の最小値 $\Phi_{\min}(x,t)$ が存在する．それは x につきほとんど到る所微分可能な函数となり，

$$\lim_{\eta\to 0}u(x,t)=\operatorname{grad}\Phi_{\min}(x,t)$$

がほとんどすべての x について成り立つ．

よく知られているように $\lim_{\eta\to 0}u(x,t)=\operatorname{grad}\Phi_{\min}$ は Олейник[1]，Ладыженская[2]，Кузнецов–Рождественский[1]，Lax[2]，Hopf[1]により構成された準線型方程式系

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}+(u_0\nabla)u_0+\operatorname{grad}v(x)=0$$

の不連続解である．このように，解 u_0 の不連続性はただ曲面

$$S(x_0{}^i(x,t),t)=S(x_0{}^j(x,t),t)$$

の上にのみ起こり得る．この曲面を等作用曲面と名付け Γ_{ij} で表わそう．このとき，$u_0(x,t)$ の不連続性に関与する Γ_{ij} は，対応する Morse 指数 γ^i および γ^j

が 0 に等しいものだけである.

3° Schrödinger 方程式に対する確率的衝撃波

4. 定理 3.2 の系　$n=2$ の場合を考えよう. §2-2° の条件 3 が満たされているとせよ. このとき, $\Gamma_{ij}\cap\gamma$ の測度が任意の i,j に関して 0 となるような道 γ に沿っての Schrödinger 方程式の解の絶対値の 2 乗の積分は次の性質をもつ.

$$\int_{\gamma}|\varphi(x,t)|^2 dl \xrightarrow[h\to 0]{} \sum_{k=1}^{k_0}\int_{\gamma}\frac{\varphi^2[x_0{}^k(x,t)]}{|J[x_0{}^k(x,t),t]|}dl.$$

このことは曲線 γ の上では古典的な確率の加法性が成り立つことを意味している. 一方, 曲線 Γ_{ij} の切片であって, 他の曲線 Γ_{km} ($k\neq i$, または $m\neq j$) との交わりは測度 0 の集合であるような曲線 l_{ij} に沿っての Schrödinger 方程式の解 $\psi(x,t)$ の 2 乗積分に関しては関係:

$$\int_{l_{ij}}|\psi(x,t)|^2 dl \xrightarrow[h\to 0]{}$$
$$\int_{l_{ij}}\left|\exp\left(-i\frac{\gamma^i-\gamma^j}{2}\pi\right)\frac{\varphi[x_0{}^i(x,t)]}{|J[x_0{}^i(x,t),t]|^{1/2}}+\frac{\varphi[x_0{}^j(x,t)]}{|J[x_0{}^j(x,t),t]|^{1/2}}\right|^2 dl$$
$$+\sum_{m\neq i,j}^{k_0}\int_{l_{ij}}\frac{\varphi^2(x_0{}^m(x,t))}{|J[x_0{}^m(x,t),t]|}dl$$

が成り立つ.

したがって, Morse の指数 γ^i および γ^j に応じて, 曲線 Γ_{ij} に電子が存在する確率は, 影響領域での初期確率が 1 という条件のもとで, 準古典近似において干渉の結果として強められたり ($\gamma^i-\gamma^j$ が奇数の場合), 0 になったり ($\gamma^i-\gamma^j$ が偶数の場合) する. このような質的効果は物理関係の文献では知られていない.

§3　境界値問題および境界層

1. トンネル型方程式

$$\begin{cases}\Delta u-\omega^2c^2(x)u=0, & x=(x_1,x_2)\\ u|_{\Gamma}=f(s), & c^2(x)\geqq\alpha>0\end{cases}\tag{3.1}$$

を考察しよう. ここで $c(x), f(x)$ は実解析関数, Γ は解析的閉曲線, s は曲線のパラメーター(弧長).

第 1 章 §3 の意味での陪特性方程式は次のように書ける.

$$\ddot{x}_i = -\frac{\partial c^2}{\partial x_i}, \tag{3.2}$$

$$x(0) = x_0(s), \qquad \dot{x}(0) = c[x_0(s)]\vec{n}, \qquad s \in \Gamma.$$

ここで $\vec{n}$ は曲線 Γ の法線.

$X(s,t)=x(t)$ とおこう．このとき次の命題が成り立つ.

定理2　x を Γ で囲まれた有界領域の点で方程式(3.2)の焦点ではないものとする．このとき，方程式系：$X(s,t)=x$ は有限個の解

$$s^k = s^k(x), \qquad t^k = t^k(x), \qquad (k=1,\cdots,k_0)$$

を持ち，問題(3.1)の解は次のように表わされる.

$$u(x) = \sum_{k=1}^{k_0} f(s^k)\left|\frac{\partial(s^k,t^k)}{\partial(x_1,x_2)}\right|^{1/2}\exp\left\{-\omega\int_0^{t_k} c^2[X(s^k,\tau)]d\tau\right\}\left(1+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right).$$

ここで，$s^k=s^k(x)$，$t^k=t^k(x)$.

この場合，漸近式が $\gamma^i-\gamma^j=0$ となる曲線 Γ_{ij} の上で不連続になることは容易に見られる.

2. 解の漸近形を調べるのには，特性方程式の実解ばかりでなく虚の解も重要である．実解析的係数をもった Schrödinger 方程式に対して，古典的粒子が存在し得ない領域(影)での解の漸近形は Newton 方程式の複素解によって決定される．話をかえていえば，境界値問題の実解が存在しないならば，漸近形はその問題の複素解によって決定されるのである．複素の焦点は存在可能であり，その点での漸近形は近くの点でよりもほんの少し大きくなる．したがって，複素焦点はある意味で周囲の点よりも明るい(Маслов[4]).

補足　Hamilton 方程式に対する大域解の存在について

B. Дубнов

1°　補題　函数 $\mathscr{H}(p, y, t)$ $(p, y \in \boldsymbol{R}^n,\ t \in \boldsymbol{R}^1)$ は変数 p, y, t に関して 1 階連続微分可能で，次の条件を満たすとする．

$$p = O(\mathscr{H}^s), \qquad (p \to \infty),$$
$$\mathscr{H}_t = O(1+|p|^\tau), \qquad \mathscr{H}_p < c(|p|).$$

ここで $c(x)$ は $[0, \infty)$ で定義された連続函数，τ と s は不等式 $\tau s \leqq 1$ を満たす．すべての評価は y, t に関して一様とする．

このとき方程式系

$$\begin{cases} \dot{y} = \mathscr{H}_p \\ \dot{p} = -\mathscr{H}_y \end{cases} \tag{1}$$

$$p(0) = p_0, \qquad y(0) = y_0 \tag{2}$$

の解 $p(t), y(t)$ に対して，次の評価が成り立つ．

$$|p(t)| < a(t), \qquad |y_0 - y(t)| < b(t), \qquad (t \geqq 0)$$

ここで $a(t), b(t)$ は $[0, \infty)$ で定義された函数である．

証明　よく知られているように

$$\dot{\mathscr{H}} \equiv \frac{d}{dt}\mathscr{H}(p(t), y(t), t) = \mathscr{H}_t$$

であるから，$\dot{\mathscr{H}} = 0(1+|\mathscr{H}|^{s\tau})$，すなわち $|\dot{\mathscr{H}}| \leqq A(1+|\mathscr{H}|^{s\tau})$ (A は定数) が成り立つ．$g(\mathscr{H})$ を

$$g(\mathscr{H}) = \int_{\mathscr{H}(p_0, y_0, 0)}^{\mathscr{H}} \frac{d\mathscr{H}}{A(1+|\mathscr{H}|^{s\tau})}$$

で定義しよう．明らかに g は単調増大函数で，$\boldsymbol{R}$ 全体で定義された逆函数 g^{-1} をもち，不等式

$$|g(\mathscr{H}(p(t), y(t), t))| = \left| \int_0^t \frac{\dot{\mathscr{H}} dt}{A(1+|\mathscr{H}|^{s\tau})} \right| < t$$

を満たす．したがって，

$$|\mathscr{H}(p(t), y(t), t)| < \max\{g^{-1}(t), -g^{-1}(-t)\}$$

より，

$$p(t)=O\{[\max\{g^{-1}(t),-g^{-1}(-t)\}]^s\},\qquad (p\to\infty)$$

を得る．一方，$|y_0-y(t)|$ に関しては，

$$|y_0-y(t)|=\left|\int_0^t \mathscr{H}_p(p(t),y(t),t)dt\right|<tC(a(t))\equiv b(t).$$

（証明終り．）

注意[1]　$\mathscr{H}(p,y,t)$ が p に関する多項式で $\lim_{|p|\to\infty}\mathscr{H}(p,y,t)=\infty$ ならば，補題の仮定は満たされる．

系　補題の仮定のもとで方程式(1), (2)の解が $0\leqq t<\infty$ で存在する．

証明　Peano の定理によって，点 $(p_0,y_0,0)$ を通る(1)の積分曲線は，半空間 $t>0$ の中に含まれる任意の有界領域の境界まで延長することができる．そのような領域 G として，次の三つの領域の直積をとろう．

1)　$\{0<t<T\}\subset \boldsymbol{R}^1$,　　($T$ は任意の数),

2)　$\{|p|<a(T)\}\subset \boldsymbol{R}^n$,

3)　$\{|y-y_0|<b(T)\}\subset \boldsymbol{R}^n$.

このとき補題の評価により，$(p_0,y_0,0)$ を通る(1)の積分曲線は $\bar{G}$ の境界点 (p_1, y_1, T) まで延長される．　（証明終り．）

2° 単純特性的な弱結合双曲系

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}+\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_n\leqq m}a_{k_0,k_1,\cdots,k_n}(t,x)\frac{\partial^{k_0+\cdots+k_n}u}{\partial t^{k_0}\cdots\partial x_n{}^{k_n}}=0 \tag{1}$$

を考察しよう．ここで $u=(u_1,\cdots,u_\tau)$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $a_{k_0,\cdots,k_n}$ は $\tau\times\tau$ の行列で，$k_0+k_1+\cdots+k_n=m$ に対しては単位行列のスカラー倍とする．

特性多項式

$$\begin{aligned}A(p_0,p)&\equiv A(p_0,p,t,x)\\&\equiv p_0{}^m+\sum_{k_0+\cdots+k_n=m}a_{k_0,\cdots,k_n}(t,x)p_0{}^{k_0}p_1{}^{k_1}\cdots p_n{}^{k_n}\end{aligned} \tag{2}$$

を導入しよう．ここで $p=(p_1,\cdots,p_n)$, $A(p_0,p)$ は明らかに $p_0,p_1,\cdots,p_n$ に関して次数 m の斉次多項式である．(1)に対する特性方程式はよく知られているように，

1)〔訳注〕 $\mathscr{H}(p,y,t)$ が p に関して楕円型ならばこれは正しい．しかし一般には正しくない．反例：$\mathscr{H}(p,y,t)=(1+t^2)(p_1{}^2+p_2{}^4)$ とすると $|p|=O(\mathscr{H}^{1/2})$, $\mathscr{H}_t=O(1+|p|^4)$ ゆえ $(1/2)\times 4=2>1$.

$$A\left(\frac{\partial s}{\partial t},\ \nabla s\right)=0 \tag{3}$$

である．

(1)は単純特性的な双曲系であるから，$A(p_0, p)$は次のように分解される．

$$A(p_0, p, t, x)=(p_0+\mathcal{H}_1(p, x, t))\cdots(p_0+\mathcal{H}_m(p, x, t)). \tag{3 a}$$

ここで函数 $\mathcal{H}_i(p, x, t)$は多項式 $A(p_0, p)$の Hamilton 函数といわれる．おのおのの $\mathcal{H}_i$ に対して，(1)の陪特性系

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} \\ \dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} \end{cases} \tag{4}$$

が対応する．Hamilton 函数に対する添え字はこれ以後省略する．

次の三つの仮定をおこう．

a)　方程式系(1)の係数は連続微分可能でその t に関する微分もこめて有界である．

b)　p_0 に関する方程式 $A(p_0, p)=0$ の根の絶対値は $|p|=1$ で $\alpha>0$ より大きい．

c)　$\displaystyle\min_{\substack{|p|=1\\ A(p_0, p)=0}}\left|\frac{\partial A}{\partial p_0}(p_0, p)\right|\geqq\beta>0.$

これらの仮定のもとで次の補題が成り立つ．

補題　初期条件 $x(0)=x_0$, $p(0)=p_0\neq 0$ を満たす方程式系(4)の解が $0\leqq t<\infty$ で存在する．

証明　A は連続微分可能かつ分解(3 a)を持つから $\mathcal{H}$ も連続微分可能で

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}=\dfrac{\partial A}{\partial t}\Big/\dfrac{\partial A}{\partial p_0} & (5) \\ \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}=\dfrac{\partial A}{\partial p}\Big/\dfrac{\partial A}{\partial p_0} & (6) \\ \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}=\dfrac{\partial A}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial A}{\partial p_0}. & (7) \end{cases}$$

函数 A は p_0, p に関して次数 m の斉次函数ゆえ，$\mathcal{H}$ は p に関して 1 次の斉次函数である．すなわち，

$$\mathcal{H}(p,x,t)=|p|\mathcal{H}\left(\frac{p}{|p|},x,t\right)=|p|\mathcal{H}(\tilde{p},x,t). \tag{8}$$

ここで $\tilde{p}$ は半径 1 の球面に属するから，

$$|\mathcal{H}(\tilde{p},x,t)|>\alpha>0.$$

したがって

$$|p|<\frac{1}{\alpha}|\mathcal{H}(p,x,t)|. \tag{9}$$

同様にして，$\partial\mathcal{H}/\partial t$ も p に関して 1 次の斉次函数ゆえ，

$$\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right|=|p|\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\left(\frac{p}{|p|},x,t\right)\right|. \tag{10}$$

条件(c)と(5)により

$$\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\left(\frac{p}{|p|},x,t\right)\right|<M. \tag{11}$$

したがって

$$\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right|<M|p|. \tag{12}$$

(6)および A の斉次性により

$$\left|\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\right|<M_1|p|^m. \tag{13}$$

次に上に得られた不等式(9), (12), (13)を用いて方程式系(4)の解の先験的評価を求めよう．$p(t), x(t)$ が方程式系(4)を満たしているとするならば

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}(p(t),x(t),t)=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}.$$

したがって，$d\mathcal{H}/dt$ のかわりに $\dot{\mathcal{H}}$ と書いてもよかろう．(9)および(12)から

$$|\dot{\mathcal{H}}|<\frac{M}{\alpha}|\mathcal{H}| \tag{14}$$

を得る．これより(考えを決めるために，$\mathcal{H}(x_0,p_0,0)\equiv\mathcal{H}_0>0$ とする.)

$$\mathcal{H}_0e^{-Mt/\alpha}<\mathcal{H}<\mathcal{H}_0e^{Mt/\alpha} \tag{15}$$

が成り立つ．ゆえに(9)より

$$|p(t)|<\frac{\mathcal{H}_0e^{Mt/\alpha}}{\alpha}. \tag{16}$$

一方(8)より

$$|p(t)| > \frac{\mathcal{H}_0 e^{-Mt/\alpha}}{\max\limits_{|p|=1} \mathcal{H}(p, x, t)} > M_2 \mathcal{H}_0 e^{-Mt/\alpha}. \tag{17}$$

最後に，(13)および(4)の第1の方程式より

$$|x(t) - x_0| < tM_1 \mathcal{H}_0{}^m e^{Mmt/\alpha}. \tag{18}$$

Peano の定理によって$(p_0, x_0, 0)$を通る積分曲線は半空間$t>0$内の任意の有界閉領域の境界まで延長できる．今，領域$\overline{G}$として，次の三つの領域の直積を考えよう．

1) $0 \leqq t \leqq t_0$,

2) $M_2 \mathcal{H}_0 e^{-Mt_0/\alpha} \leqq |p| \leqq \dfrac{1}{\alpha} \mathcal{H}_0 e^{Mt_0/\alpha}$,

3) $|x - x_0| \leqq t_0 M_1 \mathcal{H}_0{}^m e^{Mmt_0/\alpha}$.

$(p_0, x_0, 0)$を通る方程式系(4)の解曲線は，評価(16)-(18)によって，$\overline{G}$の境界と点(p_1, x_1, t_0)で交差する．これより(4)の解が$0 \leqq t \leqq t_0$(t_0は任意)で存在することが導かれる． (証明終り．)

文　献[1)]

Abraham, R.,

[1] Transversality in manifolds of mappings, Bull. Amer. Math. Soc. **63**-4 (1963), 470–474.

Adrianova, L. Ja. (Адрианова, Л. Я.),

[1] О неприводимости систем *n* линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами (準周期係数の *n* 線型微分方程式系の既約性), Вестник ЛГУ сер. матем. и мех. **2** (1962), 14–24.

Aleksandrov, P. S. (Александров, П. С.),

[1] Комбинаторная топология, Гостехтеориздат, М.–Л., 1947；邦訳 '位相幾何学 I, II, III' 共立全書, 1958.

Alekseev, A. S.–Gel'činskiĭ, B. Ja. (Алексеев, А. С.–Гельчинский Б. Я.),

[1] Лучевой метод вычисления интенсивности головных волн (首波の強度計算の射線的方法), Сб. "Вопросы динамич. теории распростр. сейсмич. волн" (論文集 '地震波伝播の動力学的理論の諸問題'), Изд-во ЛГУ, 1961, pp. ?

Babič, V. M. (Бабич, В. М.),

[1] Фундаментальное решение гиперболических уравнений с переменными коэффициентами (変数係数双曲型方程式の基本解), Матем. сб. **52** (94) -2 (1960), 709–738.

[2] Аналитический характер поля нестационарной волны в окрестности каустики (非定常波の場の焦点付近での解析性), Сб. "Вопросы динамич. теории распростр. сейсмич. волн" (論文集 '地震波伝播の動力学的理論の諸問題'), Изд-во ЛГУ, 1961, pp. 115–145.

[3] Аналитическое продолжение решений волнового уравнения в комплексную область и каустики (波動方程式の解の複素領域への解析接続と焦点), 同上 pp. 145–153.

Bernštein, S. N. (Бернштейн, С. Н.),

[1] Собрание сочинений (選集), т. 3, Изд-во. АН СССР, 1960.

Birkhoff, G. D.,

[1] Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (1933), 681–700.

Blohincev, D. I. (Блохинцев, Д. И),

[1] Акустика неоднородной движущейся жидкости (非等質運動流体の音響

1)〔訳注〕 原著ではロシア字母順となっていたが英字母順に改め通し番号を廃した. ロシア人名の英綴は Mathematical Review transcription によった. 欧文献のロシア語訳はわかる限り原典に戻したが尚不明のものはその旨記した. 訳者による追加文献は後にまとめてある.

学)，Гостехтеориздат, М.-Л., 1946.

Bogoljubov, N. N.-Širkov, D. V. (Боголюбов, Н. Н.-Ширков, Д. В.),

[1] Введение в теорию квантованных полей, Гостехтеориздат, М., 1957; 英訳 "Introduction to the Theory of Quantized Fields", Interscience, New York, 1959.

Bohm, D.,

[1] О возможности интерпретации квантовой теории, ст. I, Вопросы причиности в квантовой механике, ИЛ. М., 1955(量子論の解釈可能性について I, 原典不詳).

Born, M.,

[1] Vorlesungen über Atommechanik, Springer, Berlin, 1925.

Born, M.-Wolf, E.,

[1] Principles of Optics, Pergamon, 1960.

Brehovskih, L. M. (Бреховских, Л. М.),

[1] Волны в слоистых средах, Изд-во АН СССР, 1956; 英訳 "Waves in Layered Media", Academic Press, New York-London, 1960.

[2] Фокусировка звуковых волн неоднородными средами(不均質媒体による音波の焦点形成)，Акуст. журн. **2**-2(1956), 124-132.

Courant, R.,

[1] Partial differential equations (Method of Mathematical Physics II), Interscience, New York, 1962.

Courant, R.-Hilbert, D.,

[1] Methoden der Mathematischen Physik II, Springer, Berlin, 1937.

Courant, R.-Lax, P. D.,

[1] The propagation of discontinuities in wave motion, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **42**-11(1956), 872-876.

Dubrovskiĭ, V. A.-Skuridin, G. A. (Дубровский, В. А.-Скуридин, Г. А.),

[1] Асимптотические разложения в волновой механике(波動力学に於ける漸近展開)，Журнал вычислит. матем. и матем. физики, **4**-5(1964), 848-870.

Dunford, N.-Schwartz, J. T.,

[1] Linear operators I, Interscience, New York, 1958.

Elliot, J.,

[1] The equation of evolution in a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc. **103**-3(1962), 470-483.

Erdélyi, A.,

[1] Asymptotic Expansions, Dover, New York, 1958.

Fedorjuk, M. V. (Федорюк, М. В.),

[1] Метод стационарный фазы. Близкие седловые точки в многомерном случае(停留位相の方法. 多次元の場合の至近鞍点)，Ж. вычисл. матем. и. матем. физ. **4**-4(1964), 671-682.

[2] Метод стационарной фазы для многомерных интегралов(多次元積分に対する停留位相の方法), 同上 **2**-1(1962), 145-150.

Feynman, R.,

[1] Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. **20**-2(1948), 367-387.

Fok, V. A.(Фок, В. А.),

[1] Обобщение отражательных формул на случаи отражения произвольной волны от поверхности произвольной формы(任意の形状の表面に対する反射公式の一般化), Ж. ЭТФ, **20**-11(1950), 966-978.

[2] Работы по квантовой теории поля(場の量子論), Изд-во ЛГУ, 1957.

[3] О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике (古典および量子力学における正準変換), Вестник ЛГУ, **16**(1959), 67.

[4] О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике, Dirac の著 "Principle of Quantum Mechanics" の露訳への付録, Физматгиз, М., 1960.

Friedlander, F. G.,

[1] Sound Pulses, Cambridge University Press, 1958.

Friedrichs, K. O.-Keller, J. B.,

[1] Geometrical acoustics II. Diffraction, reflection and refraction of a weak spherical or cylindrical shock at a plane interface, J. Appl. Phys. **26**(1955), 961-966.

Galanin, A. D.(Галанин, А. Д.),

[1] Untersuchung der Eigenschaften des Electronen und Mesonenspins in der Klassischen Nährung, J. of Phys., **6**-1(2), (1942), 35.

Gantmaher, F. R.(Гантмахер, Ф. Р.),

[1] Теория матриц, Гостехиздат, М.-Л., 1953; 英訳 "The Theory of Matrices I, II" Chelsea, 1959.

Gårding, L.,

[1] Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations, Lecture Notes, Univ. of Chicago, 1958.

Gårding, L.-Kotake, T.-Leray, J.,

[1] Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire, à données holomorphes; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées(Problème de Cauchy, I bis et VI) Bull. Soc. Math. France, **92**(1964), 263-361.

Gavurin, M. K.(Гавурин, М. К.),

[1] Приближенное разыскание собственных чисел и теория возмущений(固有値の近似計算と摂動論), УМН, **12**-1(73), (1957), 173-175.

[2] Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора (摂動作用素の固有値と固有ベクトルの評価), ДАН СССР, **96**(1954), 1093-1095.

Gel'fand, I. M. (Гельфанд, И. М.),

[1] Лекций по линейной алгебре, Гостехиздат, М., 1951; 英訳 "Lectures on Linear Algebra", Interscience, New York, 1961.

Gel'fand, I. M.–Šilov, G. E. (Гельфанд, И. М.–Шилов, Г. Е.),

[1] Обобщенные функции, вып. I. Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1959; 邦訳 '超関数論入門 1, 2' 共立, 1963.

[2] Обобщенные функции, вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, М., 1958; 英訳 "Generalized Functions, Vol. 3. Theory of Differential Equations", Academic Press, New York–London, 1967.

Glaser, W.,

[1] Grundlagen der Elektronenoptik, 原典不詳, 露訳 Гостехтеориздат 1957.

Glazman, I. M. (Глазман. И. М.),

[1] Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, Физматгиз, М., 1963; 英訳 "Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators", IPST, Jerusalem, 1965.

Groenewold, H. J.,

[1] Quasi-classical path integrals, Math. fis. medd. Kgl. danske vid selskab, **30**-19 (1956), 1–34.

Hadamard, J.,

[1] Lectures on Cauchy's Problem, Yale Univ. Press, 1923, (再版 Dover).

Hille, E.–Phillips, R. S.,

[1] Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. (Providence), 1958.

Hopf, E.,

[1] The partial differential equation $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math. **3**-3 (1950), 201–230.

Kamke, E.,

[1] Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewönliche Differentialgleichungen, Leipzig, 1942.

Kato, T. (加藤敏夫),

[1] Integration of the equation of evolution in a Banach space, J. Math. Soc. Japan, **5** (1953), 208–234.

[2] Perturbation theory of semi-bounded operators, Math. Ann. **125** (1953), 435–447.

Kolmogorov, A. N.–Fomin, S. V. (Колмогоров, А. Н.–Фомин, С. В.),

[1] Элементы функционального анализа, Изд-во МГУ, вып. 1, 1954; вып. 2, 1960; 邦訳 '函数解析の基礎' 岩波, 1962.

Kreĭn, M. G. (Крейн, М. Г.),

[1] О формуле следов в теории возмущений (摂動論におけるトレース公式),

Матем. сб. **33**(75), (1953), 597–626.

Kučerenko, V. (Кучеренко, В.),

[1] Дипломная работа, МГУ, Физфак. (物理学科卒業論文), 1963.

Kuznecov, N. N.–Roždestvenskiĭ, B. L. (Кузнецов, Н. Н.–Рождественский, Б. Л.),

[1] Решение задачи Коши для одной системы квазилинейных уравнений со многими независимыми переменными. (多変数準線型方程式系の Cauchy 問題の解), Ж. вычислит. матем. и матем. физики, **1**–2(1961), 217–223

Ladyženskaja, O. A. (Ладыженская, О. А.),

[1] О решении нестационарных операторных уравнений различных типов (種々の非定常作用素方程式の解), ДАН СССР, **102**–2(1955), 207–210.

[2] О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений, как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении "коэффициента вязкости" к нулю (粘性係数 0 の極限として放物型方程式の解を用いた準線型双曲型方程式の不連続解の構成), ДАН СССР, **111**–2(1956), 291–294.

Ladyženskaja, O. A.–Faddeev, L. D. (Ладыженская, О. А.–Фаддеев, Л. Д.),

[1] К теории возмущений непрерывного спектра (連続スペクトルの摂動論), ДАН СССР, **120**(1958), 1187–1190.

Landau, L. D.–Lifšic, E. M. (Ландау, Л. Д.–Лифшиц, Е. М.),

[1] Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963; 邦訳 '量子力学' 東京図書, 1967.

Lavrent'ev, M. M. (Лаврентьев, М. М.),

[1] О некоторых некорректных задачах математической физики (数理物理の適切でない問題), Изд-во Сиб. отд-я АН СССР, Новосибирск, 1962.

Lavrent'ev, M. A.–Ljusternik, L. A. (Лаврентьев, М. А.–Люстерник, Л. А.),

[1] Основы вариационного исчисления (変分計算の基礎), т. 1, ч. 2, Гостехтеориздат, М.–Л., 1935.

Lax, P. D.,

[1] Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J. **24**(1957), 627–646.

[2] Hyperbolic systems of conservation laws II, Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 537–566.

Leray, J.,

[1] Lectures on Hyperbolic Equations, Lecture Notes, Inst. for Adv. Study, Princeton, 1951–2.

Levin, M. L.–Rytov, S. M. (Левин, М. Л.–Рытов, С. М.),

[1] О переходе к геометрическому приближению в теории упругости (弾性論における幾何近似への移行), Акуст. журн. **2**–2(1956), 173.

Ludwig. D.,

[1] Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, Comm. Pure Appl. Math. **13**–3(1960), 473–508.

Maslov, V. P. (Маслов, В. П.),

[1]　Квазиклассическая асимптотика решений некоторых задач математической физики I(数理物理のある種の問題の解の準古典近似 I), Ж. вычислит. матем. и матем. физ. **1**-1 (1961), 113-128; II, 1-4 (1961), 638-663.

[2]　Quasiclassical asymptotic solutions of Dirac's system of equations in the large, Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations, Acad. of Science of USSR, M., 1963.

[3]　Квазиклассическая асимптотика решения уравнения Дирака (Dirac 方程式の解の準古典近似), УМН, **18**-4 (112), (1963), 220-222.

[4]　Задача рассеяния в квазиклассическом приближении (準古典近似での散乱問題), ДАН СССР, **151**-2 (1963), 306-309.

[5]　Математическое обоснование предельного перехода из квантовой механики в классическую (量子力学より古典極限移行の数学的基礎), Научн. докл. высш. школы, Физ-матем. науки 1 (1958), 63-67.

[6]　Асимптотика собственных значений для уравнения Шредингера в одномерном и радиально-симметрическом случае (1次元および放射対称の場合の Schrödinger 方程式の固有値の漸近形), УМН. **15**-4 (94), (1960), 220-221.

[7]　Метод теории возмущений для отыскания спектра обыкновенных дифференциальных операторов с малым параметром при старшей производной (最高階に微小パラメーターをもつ常微分作用素のスペクトルを調べる摂動論の方法), ДАН СССР, **111**-5 (1956), 977-980.

[8]　О предельном поведении некоторых квантово-механических величин (ある種の量子力学的量の極限行動), ДАН СССР, **95**-4 (1954), 623-626.

[9]　Теория возмущений многомерного уравнения Шредингера (多次元 Schrödinger 方程式の摂動論), УМН, **16**-3 (99), (1961), 217-218.

[10]　Поведение на бесконечности собственных функций уравнения Шредингера (Schrödinger 方程式の固有函数の無限遠における挙動), УМН, **19**-1 (115), 199-201.

[11]　Теория возмущений линейных операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях (線型作用素方程式の摂動論と微分方程式の微小パラメーターの問題), ДАН СССР **111**-3 (1956), 531-534.

[12]　О переходе квантовой механики в классическую в многомерном случае (多次元の場合の量子力学の古典移行), УМН, **15**-1 (90) (1960), 213-219.

[13]　Теория возмущений при переходе от дискретного спектра и непрерывному (離散スペクトルから連続スペクトルへの移行の摂動論), ДАН СССР, **109**-2 (1956), 267-270.

[14]　Метод ВКБ в многомерном случае (多次元の WKB 法), Heading [a] の露訳への付録, 1965.

Milnor, J.,

[1]　Morse Theory, Princeton Univ. Press, 1963; 邦訳 'モース理論' 吉岡, 1968.

Morette, C.,

[1] On the definition and approximation of Feynman path integral, Phys. Rev. **81** (1951), 848–852.

Morse, M.,

[1] The Calculus of Variations in the Large, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 18, New York, 1934.

Morse, P. M.–Feshbach, H.,

[1] Methods of Theoretical Physics, I, II, McGraw-Hill, New York, 1953.

Natanson, I. P. (Натансон, И. П.),

[1] Теория функций вещественной переменной (実変数函数論), ГИТТЛ, М., 1950.

Oleĭnik, O. A. (Олейник, О. А.),

[1] О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения "неисчезающей вязкости" ('消えない粘性' の導入による1階準線型方程式の Cauchy 問題の一般化解の構成), УМН, **14**–2 (86), (1959), 160–164.

[2] Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений (非線型微分方程式の不連続解), УМН, **12**–3 (75), (1957), 3–73.

Pauli, W.,

[1] Diracs Wellengleichung des Electrons und geometrische Optik, Helv. Phys. Acta, **5**–3 (1932), 179.

Petrošen', G. I. (Петрошень, Г. И.),

[1] Методика построения решений задач для сложных сред (複合媒質の問題の解の構成法), "Вопросы динамич. теории распростр. сейсмич. волн" сб I. ('地震波伝播の動力学的理論の問題' 第1集), Гостехтеориздат, М.-Л., 1957.

Petrovskiĭ (Petrowsky), I. G. (Петровский, И. Г.),

[1] Über das Cauchysche Problem für System von partiellen Differentialgleichungen, Матем. сб. **44**–5, (1937), 815–870.

[2] Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961; 第2版の邦訳 '偏微分方程式論' 東京図書, 1958.

[3] Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1964; 第4版の邦訳 '常微分方程式論 I, II' 東京図書, 1961.

Pontrjagin, L. S. (Понтрягин, Л. С.),

[1] Непрерывные группы, изд 2, Гостехиздат, М., 1954; 邦訳 '連続群論上下' 岩波, 1958.

[2] Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопии, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XLV, изд-во АН СССР, М., 1955.

Povzner, A. Ja.–Suharevskiĭ, I. V. (Повзнер, А. Я.–Сухаревский, И. В.),

[1] О разрывах функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения (波動方程式の混合問題の Green 函数の不連続性), Матем. сб. **51** (93)–1, (1960),

3–26.

Pyt'ev, Ju. P. (Пытьев, Ю. П.),

[1] О связи классической механики и волновой (古典力学と波動力学の関係), ДАН СССР, **149**–2 (1963), 298–301.

Rellich, F.,

[1] Störungstheorie der Spectralzerlegung I, Math. Ann. **113** (1936), 600–619; II, ibid. 677–685; III, ibid, **116** (1939), 555–570; IV, ibid, **117** (1941), 356–382; V, ibid, **118** (1943), 462–484.

Riesz, F.–Sz. Nagy, B.,

[1] Leçon d'analyse fonctionelle, Académiai Kiado, Budapest, 1953; 邦訳 '関数解析学上下' 共立, 1974.

Rubinow, J.–Keller, J.,

[1] Asymptotic solution of Dirac equation, Phys. Rev., **131**–6 (1963), 2789–2796.

Rummer, Ju. B. (Руммер, Ю. Б),

[1] Исследования по пятиоптике (5–光学の研究), Гостехиздат, М., 1956.

Rytov, S. M. (Рытов, С. М.),

[1] Модулированные колебания и волны (変調した振動と波), Труды ФИАН, **2**–1 (1938), 1.

Savrasov, Ju. S. (Саврасов, Ю, С.),

[1] Вычисление собственных значений для уравнения Шредингера (Schrödinger 方程式の固有値計算), дипл. раб., МГУ, физфак (物理学科卒業論文), 1960.

Schiff, L. I.,

[1] Quantum Mechanics, McGraw Hill, 1955; 邦訳 '量子力学上下', 吉岡, 1957–8.

Schweber, S. S.,

[1] An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Peterson, Evanston, 1961.

Seifert, H.–Threlfall, W.,

[1] Variationsrechnung im Grossen, B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1938.

Smirnov, V. I. (Смирнов, В. И.),

[1] Курс высшей математики, т. IV, Гостехтеориздат, М.–Л., 1951; 邦訳 '高等数学教程 8, 9, 10', 共立, 1961.

Šnol', E. E. (Шноль, Э. Э.),

[1] О поведении собственных функций уравнения Шредингера (Schrödinger 方程式の固有函数の挙動), Матем. сб., **42** (84)–3, (1957), 273–286.

Sobolev, S. L. (Соболев, С. Л.),

[1] Волновое уравнение для неоднородной среды (不均質媒体に対する波動方程式), Тр. сейсмол. ин-та АН СССР, **6** (1930).

[2] Некоторые применения функционального анализа в математической

физике, изд-во ЛГУ, Л., 1950; 英訳 "Application of Functional Analysis in Mathematical Physics", AMS Providence, 1963(東大出版会).

Solomjak, M. Z. (Соломяк, М. З.),

[1] О собственных числах и собственных векторах возмущенного оператора (摂動作用素の固有値と固有ベクトル), ДАН СССР, **90** (1953), 29–32.

Solujan, S. I.–Hohlov, R. V. (Солуян, С. И.–Хохлов, Р. В.),

[1] Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде (消散媒体中の有限振幅の音波の伝播), Вестник МГУ, **3** (1961), 52–61.

Sommerfeld. A.,

[1] Optik (Vorlesungen über Theoretische Physik IV), Dieterich, Wiesbaden, 1950.

[2] Atombau und Spektrallinien, Friedr. Vieweg & Sohn Akt. Ges., Braunschweig, 1922.

Stèrrok, P. A. (Стэррок. П. А.),

[1] Статистическая и динамическая электронная оптика. Теория фокусировки в линзах, отклоняющих устройствах и ускорителях, ИЛ. М., 1958 (静および動電子光学. レンズ, 傾斜器および増幅器における焦点形成理論, 原典不詳).

Sz. Nagy, B.,

[1] Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Springer, Berlin, 1942.

Tihonov, A. N. (Тихонов, А. Н.),

[1] О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации (適切でない問題の解と正則化), ДАН СССР, **151**–3, (1963), 501.

[2] О регуляризации некорректно поставленных задач (適切でない問題の正則化), ДАН СССР, **153**–3, (1963), 49.

Tihonov, A. N.–Glasko, V. B. (Тихонов, А. Н.–Гласко, В. Б),

[1] О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма I рода (第一種 Fredholm 型積分方程式の近似解), Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **4**–2 (1964), 564–571.

Titchmarsh, E. C.,

[1] Eigenfunction Expansions Associated with Second order Differential Equations, Part II, Oxford, 1958.

Vilenkin, N. Ja. et al. (Виленкин, Н. Я. и др.),

[1] Функциональный анализ, Наука, М., 1964; 邦訳 '函数解析' 現代応用数学ハンドブック 9, 総合図書 1968.

Višik, M. I. (Вишик, М. И.),

[1] Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и прибли-

женный метод их решения(作用素係数方程式の Cauchy 問題，微分方程式系の混合境界値問題と解の近似法)，Матем. сб. **39**(81)-1, (1956), 51-148.

Višik, M. I.-Ljusternik, L. A.(Вишик, М. И.-Люстерник, Л. А.),

[1] Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром,(微小パラメーターを持つ線型微分方程式の正則退化と境界層)，УМН, **12**-5(77) (1957), 3-122.

Zvolinskiĭ, N. V.-Skuridin, G. A.(Зволинский, Н. В.-Скуридин, Г. А.),

[1] Об асимптотическом методе решения динамических задач теории упругости(弾性論の動力学的問題の解の漸近法)，Изв. АН СССР, сер. геофиз. **2** (1956), 134-143.

追加文献

Abraham, R.-Robin, J.,

[a] Transversal Mappings and Flows, Benjamin, 1967. Abraham [1] より詳しく新しい．これは Thom[a] へと繋がってゆく．

Arnol'd, V. I.(Арнольд, В. И.),

[a] О характеристическом классе, входящем в условия квантования, Функц. анал. и его прилож. **1**(1967), 1-14. 英訳 "On a characteristic class entering in the quantization conditions", Funct. Anal. and its Appl. **1**(1967), 1-13. Маслов 指数(第2部第2章)の第一の定義を敷衍しその不変性等を論じている．

Beresteckiĭ, V. B.-Lifšic, E. M.-Pitaevskiĭ, L. P.(Берестецкий, В. Б.-Лифшиц, Е. М.-Питаевский, Л. П.),

[a] Релятивистская квантовая теория, ч. 1, Наука, 1968. 邦訳 '相対論的量子力学 I' 東京図書，1969.

Buslaev, V. S.(Буслаев, В. С.),

[a] Квантования и метод ВКБ, Труды Мат. ин-та Стеклова **110**(1970) pp. 5-28. 英訳 "Quantization and the WKB method", Trudy Mat. Inst. Steklov. **110** (1970) pp. 1-27. Lagrange 多様体の普遍被覆の上で生成積分なるものを考え，Маслов 理論の興味深い再構成を行なっている．

Dubnov, V. L.(Дубнов, В. Л.),

[a] О каноническом операторе Маслова для гиперболических уравнений, ДАН **183**(1968), 754-757. 英訳 "Maslov's canonical operator for hyperbolic equations", Soviet Math. Doklady **9**(1968), 1435-1438. 双曲型方程式の場合，作用素 A にあたるものの導入に関して一つの厳密な定式化を試みている．

Duistermaat, J. J.,

[a] Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities, Comm. Pure Appl. Math. **27**(1974), 207-281. Hörmander[a]の解釈に沿ってパラメーターを含む場合を取扱い漸近式の形を位相函数の特異点の分類に合わせて詳しく調べ，さらに Thom[a]との関係に及んでいる．

Duistermaat, J. J.-Hörmander, L.,

[a] Fourier integral Operators II, Acta Math. **128**(1972), 183–269.

Egorov, Ju. V. (Егоров, Ю. В.),

[a] Канонические преобразования и псевдодифференциальные операторы ТММО **24**(1971), 3–28; 英訳 "Canonical transformations and pseudodifferential operaters", Trans. Moscow Math. Soc. **24**(1971), 1–28.

[b] О необходимых условиях разрешимости псевдодифференциальных уравнений главного типа (主型の擬微分方程式の可解性の必要条件), ТММО **24**(1971), 29–41; 英訳 "On necessary conditions for solvability of pseudodifferential equations of principal type", Trans. Moscow Math. Soc. **24**(1971), 29–42. 彼は正準変換を擬微分方程式の可解性に応用してМасловを世界に紹介した.

Fedorjuk, M. V. (Федорюк, М. В.),

[a] Метод стационарной фазы и псевдодифференциальные операторы, УМН **26**(1971), 67–112. 英訳 "The stationary phase method and pseudodifferential operators", Russian Math. Surveys, **26**(1971), 65–115. Fourier 積分作用素, 擬微分作用素の正準変換などの概観論文.

Fujiwara, D. (藤原大輔),

[a] '偏微分方程式における漸近的方法' 岩波講座基礎数学(近刊). Маслов 理論を含む近似解の理論の解説書.

Fuks, D. B. (Фукс, Д. Б.),

[a] О характеристических классах Маслова-Арнольда, ДАН **178**(1968), 303–306; 英訳 "Maslov-Arnol'd characteristic classes", Soviet Math. Dokl. **9**(1968), 96–99. Арнольд の定義した特性類と Stiefel-Whitney 類および Borel 類との関係を論じている.

Heading, J.,

[a] An Introduction to Phase-Integral Methods, Methuen, London & J. Wiley, New York, 1962. 古典的 WKB 法の詳しい解説書で歴史的文献も豊富.

Hörmander, L.,

[a] Fourier integral operators I, Acta Math. **127**(1971), 79–183. 佐藤幹夫の特異スペクトルと Маслов の正準変換論とを取り入れ擬微分作用素の局所化理論に一展望を与えた.

Keller, J. B.,

[a] Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for nonseparable systems, Annals of Phys. **4**(1958), 180–188. 多次元 Schrödinger 方程式の定常解の近似解構成と一般の量子化条件(第2部第4章(4.1))を古典 WKB 法からの素朴な類推で導いている. Маслов 指数に相当するものも与えており, 引用しておくのが公正と思われる. (Маслов は Rubinow-Keller[1] を知っていたのだから故意でなければ怠慢である.) この仕事が数学者の注意を引かなかったのは擬微分作用素が未発達のため特殊な古典的問題と思われたからであろう.

Keller, J. B.–Rubinow, S. I.,

[a] Asymptotic solution of eigenvalue problems, Annals of Phys. **9**(1960), 24–

75. 上の論文の方法に従って種々の有界領域における被約波動方程式の固有値の近似計算を行なっている.

Kline, M.–Kay, I. W.,

[a] Electromagnetic Theory and Geometrical Optics, J. Wiley-Interscience, New York, 1965. この方面の教科書としては最新で New York 学派の成果も多く採られている.

Kohno, M. (河野実彦),

[a] A two point connection problem for n-th order single linear ordinary differential equations with an irregular singular point of rank two, Japan. J. Math. **40** (1971), 11–62. 古典 WKB 法は華々しさはないが少しずつ進歩しており, これは最近作の一つ. 彼による接続問題の解説が'線型微分方程式の大域的解析'と題して'函数方程式'に連載されている((I) **25** (1972), 21–52, (II) 以下未刊). さらに一般超幾何函数に関する大久保謙二郎の未発表の結果で microlocal calculus に用いられた例もあり, 今後多重特性的な偏微分方程式の取扱いと相俟って発展を要請される分野である.

Leray, J.,

[a] Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles, Convegno intern. metodi valuativi nelle fisica-matematica, Accad. Naz. dei Lincei Roma, 1972. Маслов 理論の紹介で彼一流の美しい表現を用いている. 同じ内容は 1971 年秋の日本における講演でも紹介された.

Ludwig, D.,

[a] Uniform asymptotic expansion at a caustic, Comm. Pure Appl. Math. **19** (1966), 215–250.

[b] Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 103–138.

Luneburg, R. K.,

[a] Mathematical Theory of Optics, Univ. of California Press (復刻版) 1964. 古典幾何光学の定評ある教科書.

Maslov, V. P. (Маслов, В. П.),

[a] О регуляризации задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений, ДАН, **177** (1967), 1277–1280; 英訳 "Regularization of the Cauchy problem for pseudo-differential equations", Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 1588–1591. 漸近展開のすべての項を求めることを含めて表現法の洗練を心掛けている. 対象は主に 1 階双曲系.

[b] Свойства абсолютной сходимости многомерных рядов Фурье с точки зрения геометрии слабых разрывов разлагаемых функций, ДАН, **191** (1970), 275–278; 英訳 "Absolute convergence property of multidimensional Fourier series from the standpoint of the geometry of the weak discontinuities of the expanded functions", Soviet Math. Dokl. **11** (1970), 350–353. 漸近表示式の一つの応用として弱特異性を持つ函数の Fourier 式展開が特異集合の縮閉線上で発

散度が増すことを調べた.

[c] The characteristics of pseudo-differential operators and difference schemes, Actes Congrès intern. Math. Nice, 1970, Tome 2, pp. 755–769. 最近までの自分の仕事の紹介. 夢多き文章である.

[d] Операторные методы, Наука, М., 1973. 漸近展開理論の演算子法的形式化と複素 Lagrange 多様体を扱っている. 第2巻の出現かと思われたが全般に教科書風で本書に予告された内容が尽くされてはいないようである.

Migdal, A. B.–Kraĭnov, V. P.(Мигдал, А. Б.–Крайнов, В. П.),

[a] Приближенные методы квантовой механики, Наука, 1966; 邦訳 '量子力学の近似的方法' 総合図書 1973.

Nirenberg, L.–Trèves, F.,

[a] On local solvability of linear partial differential equations, Part I: Necessary conditions, Comm. Pure Appl. Math. **18**(1970), 1–38. Part II: Sufficient conditions, Ibid. 459–510. 単純特性的な線型微分方程式の局所可解性に関する最も精密な結果であり, Маслов とは独立に正準変換を用いた.

Sato, M.–Kashiwara, M.(佐藤幹夫－柏原正樹),

[a] Microlocal calculus, 数理解析研究所講究録 **226**(1975), pp. 114–214. Lagrange 多様体の連結成分の交わり方を見て多項式冪の Fourier 変換を計算するアルゴリズムを与える画期的理論. Маслов 指数の新解釈も含み, また WKB 法の接続公式に相当する部分も含んでいる点で Маслов を超えている.

Sato, M.–Kawai, T.–Kashiwara, M.,

[a] Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Mathematics **287**, Springer, 1971, pp. 263–529. 佐藤幹夫の微函数(microfunction)理論と Маслов 理論の超函数論的解釈を用いて擬微分方程式系の構造を解明している. 今日 Hörmander[a]とともに二つの代表的立場をなす.

Selberg, A.,

[a] Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87. Green 函数の具体的形を測地線を用いて与えている. ある種の対称構造を用いて結果が簡明になっているのだが, これの一般化は Feynman 積分の意味づけとも絡んで大変興味深く, 青本・藤原等により試みられている.

Sjöstrand, J.,

[a] Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics, Ark. för Mat. **12**(1974), 85–130. 多重特性的な場合の仕事はまだ決定的段階に到っていないので参考のため最近活躍中の若い人の仕事を一つだけあげておく.

Terasawa, K.(寺沢寛一)編,

[a] '自然科学者のための数学概論応用編' 岩波, 1960.

Tohm, R.

[a] Stabilité Structuelle et Morphogénèse, Benjamin, Mass. 1972. C^∞ 写像の安定性の教科書. この方面は位相函数の停留点における形を座標変換で標準形に直

すために密接に関係する.
Yukawa, H. et al.(湯川秀樹他),
[a] '量子力学 III' 岩波講座現代物理学の基礎5, 1972. 江沢洋による Маслов の準古典近似理論の解説がある.

述　語　表

（五十音順，（　）内の数字は初出ページ）

摂動論と漸近的方法

1976年1月28日　第1刷発行 ©

¥ 3200

訳　者　大　内　　忠
　　　　金　子　　晃
　　　　村　田　　実

発行者　岩　波　雄　二　郎

〒101　東京都千代田区一ツ橋 2 - 5 - 5
発行所　株式会社　岩　波　書　店
電話 03-265-4111
振替 東京 6-26240

印刷・理想社　製本・松岳社